Mathematik - Spezialworkshop für Känguru - Gewinner*innen

Motto: „Wie – und was – kann man abzählen, ohne zu zählen?"

Willkommen an der AAU! :-)

Das bin ich!

Und hier arbeite ich!

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Frage: Gibt es in KTN 2 Personen mit der gleiche Anzahl an
Haaren am Kopf?

>0

\# Einwohner: 560.939

Durchschnittlich # an Haaren: 80.000 (rot)
150.000 (blond)

Annahme: nicht mehr als 300.000 Haare.

Annahme: nicht mehr als 1/4 Glatzköpfe (→ ~420.000 EW mit >0 Haare)

Ja! → „Taubenschlagprinzip"

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Foto: Wikipedia

Taubenschlagprinzip: 10 Tauben passen nur in 9 Schläge, wenn in mind. einem mind. 2 Tauben sitzen.

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Bsp 1:

5 Paar blaue, 4 Paar Orange, 3 1/2 grüne Socken.

- Wie viele Socken müssen gezogen werden, bis

  1) gleichfärbiges Paar? $\longrightarrow$ 4 ✓

  2) oranges Paar? $\longrightarrow$ 19 ✓

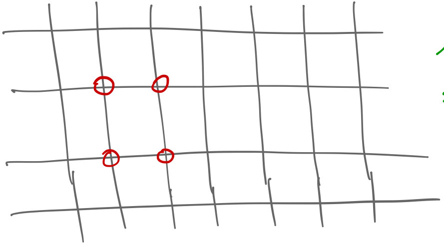
  3) ein Paar von jeder Farbe? $\longrightarrow$ 20 ✓

Bsp 2:

Wähle 5 verschiedene ganzzahlige Punkte in der Ebene.

$P_1, P_2, \dots, P_5 \in \mathbb{Z}^2$

Stimmt es, dass es dann immer ein Paar P_i, P_j $(i \neq j)$ gibt, sodass der Mittelpunkt wieder ganzzahlig ist?



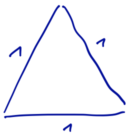
→ 4 Typen von Punkte:

1) gerade / gerade
2) gerade / ungerade
3) ungerade / gerade
4) ungerade / ungerade

$$\frac{1}{2}\cdot(\underbrace{P+Q}_{\text{gerade / gerade}})$$

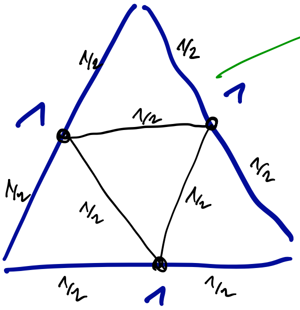
Bsp 3:

Gegeben: Gleichseitiges Δ mit Seitenlänge 1.



Verteile 5 Punkte beliebig im Δ.

Was weiß man über den Abstand?

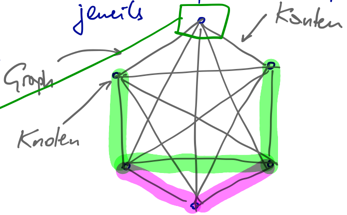


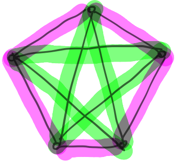
2 Punkte (Lt. Taubenschlag) liegen in gleichem Teildreieck.

$\Rightarrow$ „kleinster größter Abstand" ist $\leq 1/2$.

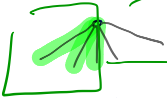
Theorem on friends and strangers:

Wenn immer sich 6 Personen treffen, gibt es unter ihnen entweder 3, die einander jeweils kennen, oder 3, die einander jeweils nicht kennen.

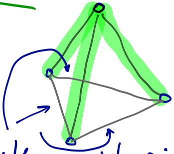




Beweis:



Taubenschlagprinzip: von 5 Kanten haben 3 die gleiche Farbe.



Fall 1: eine der Kanten ist grün $\Rightarrow$

Fall 2: keine ist grün $\Rightarrow$ 

$\square$

Neues Problem:

Eine Kugel Eis kostet 1,40€. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu zahlen?

- 2x 50c + 2x 20c
- 140x 1c

Langsam: welche Beträge können wir mit 1c gezahlt werden?

- ~~1c~~
- 1c
- 1c 1c
- 1c 1c 1c

$$€_1 = \cancel{1c} + 1c + 1c\,1c + 1c\,1c\,1c + \dots$$
$$= \cancel{1c} + 1c + 1c^2 + 1c^3 + 1c^4 + \dots$$

Ausflug: geometrische Summen

q Variable, $\quad 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

endliche Version:

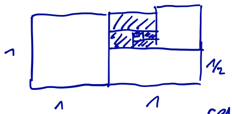
$$
\begin{array}{rcl}
1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{10} &=& S \quad \Big| \cdot q \\
q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{11} &=& S \cdot q \quad \Big| - \\
\hline
1 - q^{11} &=& S - S \cdot q \\
&=& S(1-q)
\end{array}
$$

$$\Rightarrow S = \frac{1-q^{11}}{1-q}$$

$q = 1/2 \qquad 1 + 1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + \dots + (1/2)^{11} = \dfrac{1-(1/2)^{11}}{1 - 1/2}$

$$= 2 \cdot (1 - (1/2)^{11})$$

$$\approx 1{,}999023.$$



$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{sehr groß}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{sehr groß}+1}}{1 - 1/2}$$

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Für uns immer: $\dfrac{1}{1-\text{irgendwas}} = 1 + \text{irgendwas} + \text{irgendwas}^2 + \dots$

$$E_1 = \cancel{1c} + (1c)^1 + (1c)^2 + (1c)^3 + \dots = \frac{1}{1-1c}$$

sowas wie „1“

$(1c)^0$

$$E_2 = \cancel{1c}\,\cancel{2c} + 1c\,\cancel{2c} + (1c)^2\,\cancel{2c} + \dots$$

$$+ \cancel{1c}\,2c + 1c\,2c + (1c)^2\,2c + \dots$$

$$\dots$$

$$= \overbrace{(\cancel{1c} + 1c + (1c)^2 + (1c)^3 + (1c)^4 + \dots)}^{E_1}\,\cancel{2c}$$

Herausheben!

$$+ (\cancel{1c} + 1c + (1c)^2 + (1c)^3 + \dots)\,2c$$

$$+ \underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad\qquad}\,(2c)^2 + \dots$$

$$= E_1 \cdot \cancel{2c} + E_1\,2c + E_1\,(2c)^2 + \dots$$

$$= E_1(\cancel{2c} + 2c + (2c)^2 + (2c)^3 + \dots) = E_1 \cdot \frac{1}{1-2c}$$

Wir sehen ein Muster!

$$€_5 = €_2 \cdot (\cancel{5c} + 5c + 5c^2 + 5c^3 + \dots)$$

$$= €_2 \cdot \frac{1}{1 - 5c}$$

$\vdots$

$$€_{100} = \frac{1}{1-1c}\ \frac{1}{1-2c}\ \frac{1}{1-5c}\ \frac{1}{1-10c}\ \frac{1}{1-20c}\ \frac{1}{1-50c}\ \frac{1}{1-100c}$$

$w^0 + w^1 + 2w^2 + \dots$

$3\ 1c \quad 2\ 2c \longrightarrow (\cancel{1c} + 1c + 1c^2 + 1c^3)(\cancel{2c} + 2c^1 + 2c^2)$ $\quad w^5$

$$= \underbrace{\cancel{1c}\,\cancel{2c}}_{\underbrace{w^0 \cdot w^0}_{w^0}} + \underbrace{\cancel{1c}\ 2c}_{w^0 \cdot w^2 \to w^2} + \underbrace{\cancel{1c}\ 2c^2}_{w^0 \cdot (w^2)^2 \to w^4} + \underbrace{1c\ \cancel{2c}}_{w^1} + \underbrace{1c\ 2c}_{w^3} + 1c\ 2c^2 + \underbrace{1c^2\ \cancel{2c}}_{w^2} + \underbrace{1c^2\ 2c}_{w^4} + \dots$$

Wir speichern zu viel Info in $€_{100}$! Ersetze Münze durch ihren Wert:

$1c \longrightarrow w^1$

$2c \longrightarrow w^2$

$5c \longrightarrow w^5$

$10c \longrightarrow w^{10} \dots$

$$€_{100} \to W = \frac{1}{1-w} \cdot \frac{1}{1-w^2} \cdot \frac{1}{1-w^5} \cdot \frac{1}{1-w^{10}} \cdot \frac{1}{1-w^{20}} \cdot \frac{1}{1-w^{50}} \cdot \frac{1}{1-w^{100}}.$$

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

10c :

- $1c^{10}$
- $1c^{8}\ 2c$
- $1c^{6}\ 2c^{2}$
- $1c^{4}\ 2c^{3}$
- $1c^{2}\ 2c^{4}$
- $2c^{5}$
- $1c^{5}\ 5c$
- $5c^{2}$
- $10c$
- $1c^{3}\ 2c\ 5c$
- $1c^{1}\ 2c^{2}\ 5c$

140c → 16553 Möglichkeiten (via Computeralgebra)

In [4]:
```
W
```

Out[4]:

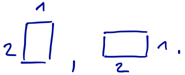
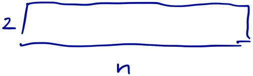
$$-\frac{1}{\left(w^{100}-1\right)\left(w^{50}-1\right)\left(w^{20}-1\right)\left(w^{10}-1\right)\left(w^{5}-1\right)\left(w^{2}-1\right)(w-1)}$$

In [6]:
```
W.series(w==0, 141)
```

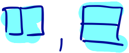
Out[6]:

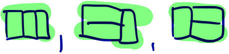
$$1 + 1w + 2w^{2} + 2w^{3} + 3w^{4} + 4w^{5} + 5w^{6} + 6w^{7} + 7w^{8} + 8w^{9} + 11w^{10} + 12w^{11} + 15w^{12} + 16w^{13} + 19w^{14} + 22w^{15} + 25w^{16} + 28w^{17} + 31w^{18} + 34w^{19} + 41w^{20} + 44w^{21} + 51w^{22} + 54w^{23} + 61w^{24} + 68w^{25} + 75w^{26} + 82w^{27} + 89w^{28} + 96w^{29} + 109w^{30} + 116w^{31} + 129w^{32} + 136w^{33} + 149w^{34} + 162w^{35} + 175w^{36} + 188w^{37} + 201w^{38} + 214w^{39} + 236w^{40} + 249w^{41} + 271w^{42} + 284w^{43} + 306w^{44} + 328w^{45} + 350w^{46} + 372w^{47} + 394w^{48} + 416w^{49} + 451w^{50} + 473w^{51} + 508w^{52} + 530w^{53} + 565w^{54} + 600w^{55} + 635w^{56} + 670w^{57} + 705w^{58} + 740w^{59} + 793w^{60} + 828w^{61} + 881w^{62} + 916w^{63} + 969w^{64} + 1022w^{65} + 1075w^{66} + 1128w^{67} + 1181w^{68} + 1234w^{69} + 1311w^{70} + 1364w^{71} + 1441w^{72} + 1494w^{73} + 1571w^{74} + 1648w^{75} + 1725w^{76} + 1802w^{77} + 1879w^{78} + 1956w^{79} + 2064w^{80} + 2141w^{81} + 2249w^{82} + 2326w^{83} + 2434w^{84} + 2542w^{85} + 2650w^{86} + 2758w^{87} + 2866w^{88} + 2974w^{89} + 3121w^{90} + 3229w^{91} + 3376w^{92} + 3484w^{93} + 3631w^{94} + 3778w^{95} + 3925w^{96} + 4072w^{97} + 4219w^{98} + 4366w^{99} + 4563w^{100} + 4710w^{101} + 4907w^{102} + 5054w^{103} + 5251w^{104} + 5448w^{105} + 5645w^{106} + 5842w^{107} + 6039w^{108} + 6236w^{109} + 6495w^{110} + 6692w^{111} + 6951w^{112} + 7148w^{113} + 7407w^{114} + 7666w^{115} + 7925w^{116} + 8184w^{117} + 8443w^{118} + 8702w^{119} + 9038w^{120} + 9297w^{121} + 9633w^{122} + 9892w^{123} + 10228w^{124} + 10564w^{125} + 10900w^{126} + 11236w^{127} + 11572w^{128} + 11908w^{129} + 12337w^{130} + 12673w^{131} + 13102w^{132} + 13438w^{133} + 13867w^{134} + 14296w^{135} + 14725w^{136} + 15154w^{137} + 15583w^{138} + 16012w^{139} + 16553w^{140} + \mathcal{O}\left(w^{141}\right)$$

Noch ein Bsp.:

Dominosteine . Wie viele Rechtecke mit Maße 2xn kann man bauen? 

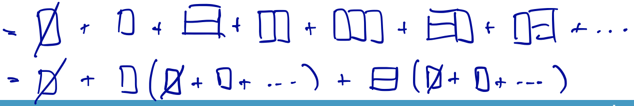
n=1:  → 1 Mögl.

n=2:  → 2 Mögl.

n=3:  → 3 Mögl.!

n=4:  → 5 Mögl.

→ Damit müssen das Fibonacci-Zahlen sein!

$T =$ 

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

$$\tau = \varnothing + \square\,\tau + \boxminus\,\tau \qquad \Big|\; -$$

$$\tau - \square\,\tau - \boxminus\,\tau = \varnothing$$

$$\varnothing\,\tau$$

$$(\varnothing - \square - \boxminus)\cdot\tau = \varnothing \qquad \Big|\; :\,(\varnothing - \square - \boxminus)$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{\varnothing}{\varnothing - \square - \boxminus} \;\hat{=}\; \frac{1}{1-(\square+\boxminus)}$$

$$= \varnothing + (\square+\boxminus) + (\square+\boxminus)^2 + (\square+\boxminus)^3 + \dots$$

$\square \to w$

$\boxminus \to w^2$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{1-w-w^2}.$$

Hier sind Fibonacci-Zahlen versteckt!

Untersuche $T = \frac{1}{1-w-w^2}$ mit Computeralgebra:

Fibonacci! :-)

```
In [7]: (1 / (1 - w - w^2)).series(w==0, 100)
```

Out[7]:

$$
\begin{aligned}
&1 + 1w + 2w^{2} + 3w^{3} + 5w^{4} + 8w^{5} + 13w^{6} + 21w^{7} + 34w^{8} + 55w^{9} + 89w^{10} + 144w^{11} + 233w^{12} + 377w^{13} + 610w^{14} \\
&+ 987w^{15} + 1597w^{16} + 2584w^{17} + 4181w^{18} + 6765w^{19} + 10946w^{20} + 17711w^{21} + 28657w^{22} + 46368w^{23} + 75025w^{24} \\
&+ 121393w^{25} + 196418w^{26} + 317811w^{27} + 514229w^{28} + 832040w^{29} + 1346269w^{30} + 2178309w^{31} + 3524578w^{32} \\
&+ 5702887w^{33} + 9227465w^{34} + 14930352w^{35} + 24157817w^{36} + 39088169w^{37} + 63245986w^{38} + 102334155w^{39} \\
&+ 165580141w^{40} + 267914296w^{41} + 433494437w^{42} + 701408733w^{43} + 1134903170w^{44} + 1836311903w^{45} \\
&+ 2971215073w^{46} + 4807526976w^{47} + 7778742049w^{48} + 12586269025w^{49} + 20365011074w^{50} + 32951280099w^{51} \\
&+ 53316291173w^{52} + 86267571272w^{53} + 139583862445w^{54} + 225851433717w^{55} + 365435296162w^{56} \\
&+ 591286729879w^{57} + 956722026041w^{58} + 1548008755920w^{59} + 2504730781961w^{60} + 4052739537881w^{61} \\
&+ 6557470319842w^{62} + 10610209857723w^{63} + 17167680177565w^{64} + 27777890035288w^{65} + 44945570212853w^{66} \\
&+ 72723460248141w^{67} + 117669030460994w^{68} + 190392490709135w^{69} + 308061521170129w^{70} \\
&+ 498454011879264w^{71} + 806515533049393w^{72} + 1304969544928657w^{73} + 2111485077978050w^{74} \\
&+ 3416454622906707w^{75} + 5527939700884757w^{76} + 8944394323791464w^{77} + 14472334024676221w^{78} \\
&+ 23416728348467685w^{79} + 37889062373143906w^{80} + 61305790721611591w^{81} + 99194853094755497w^{82} \\
&+ 160500643816367088w^{83} + 259695496911122585w^{84} + 420196140727489673w^{85} + 679891637638612258w^{86} \\
&+ 1100087778366101931w^{87} + 1779979416004714189w^{88} + 2880067194370816120w^{89} + 4660046610375530309w^{90} \\
&+ 7540113804746346429w^{91} + 12200160415121876738w^{92} + 19740274219868223167w^{93} \\
&+ 31940434634990099905w^{94} + 51680708854858323072w^{95} + 83621143489848422977w^{96} \\
&+ 135301852344706746049w^{97} + 218922995834555169026w^{98} + 354224848179261915075w^{99} + \mathcal{O}\left(w^{100}\right)
\end{aligned}
$$

UNIVERSITÄT KLAGENFURT