

Block 1: Codierungstheorie

1. **EAN/GTIN:** Multipliziere die Ziffern, von rechts beginnend, abwechselnd mit 1 und 3 und summiere die erhaltenen Zahlen. Das Ergebnis muss durch 10 teilbar sein.
 - a) Prüfe die EAN 8710671087843 und bestimme die Prüfziffer der EAN 9009777?.
 - b) Rekonstruiere die fehlende Ziffer der EAN 40046750046?8.
 - c) Modifiziere zwei aufeinanderfolgende Ziffern von 8710671087843, sodass sich wieder eine gültige EAN ergibt.
 - d) Kann man stets erkennen, wenn genau eine Ziffer verändert wurde? (Warum? Gegenbeispiel?)
 - e)  Kann man stets erkennen, wenn zwei Ziffern vertauscht wurden? (Warum? Gegenbeispiel?)
2. **ISBN-10:** Multipliziere die Zahlen, beginnend von rechts, mit 1, 2, ..., 10; summiere die erhaltenen Zahlen. Das Ergebnis muss durch 11 teilbar sein. Die rechteste Ziffer (Prüfziffer) kann „X“ sein, was für 10 steht.
 - a) Prüfe die ISBN 0-471-98232-6 und bestimme die Prüfziffer der ISBN 0-387-90518-?.
 - b) Rekonstruiere die fehlende Ziffer der ISBN 3-54?-90518-9.
 - c) Kann man stets erkennen, wenn genau eine Ziffer verändert wurde? (Warum? Gegenbeispiel?)
 - d)  Kann man stets erkennen, wenn zwei Ziffern vertauscht wurden? (Warum? Gegenbeispiel?)
3. **IBAN Light:** Die „IBAN Light“ ist die kleine Schwester der IBAN: anstelle von 20 Stellen hat die „IBAN Light“ nur 8 Stellen. Die Verifizierung funktioniert allerdings gleich wie bei der normalen IBAN: Nach dem Übersetzen in eine Zahl muss bei Division durch 97 genau 1 Rest bleiben.
 - a) Prüfe, ob AT19 2019 eine gültige „IBAN Light“ ist.
 - b) Ermittle die fehlende Prüfziffer der „IBAN Light“ AT6? 1234.
 - c)  Ermittle die fehlenden Prüfstellen der „IBAN Light“ AT?? 1993.

Block 2: Zählen ist schwer!

Das Taubenschlagprinzip: 11 Bälle passen nur in 10 Kästchen, wenn in einem Kästchen zumindest zwei Bälle sind.

1. Eine Schublade enthält 6 Paare schwarze, 5 Paare weiße, 5 Paare rote und $3\frac{1}{2}$ Paare grüne Socken.
 - a) Wie viele einzelne Socken müssen wir herausnehmen um sicherzugehen, dass wir zwei Socken mit derselben Farbe erhalten?
 - b) Wie viele einzelne Socken müssen wir herausnehmen um sicherzugehen, dass wir zwei Socken mit unterschiedlichen Farben erhalten?
 - c) Wie viele einzelne Socken müssen wir herausnehmen um sicherzugehen, dass wir zwei grüne Socken erhalten?
 - d) Wie viele einzelne Socken müssen wir herausnehmen um sicherzugehen, dass wir mindestens eine Socke jeder Farbe erhalten?
2. Wahr oder falsch: In jeder Gruppe von mindestens zwei Personen gibt es zwei, die die gleiche Anzahl von Freundinnen und Freunden innerhalb der Gruppe haben.
3. Ein kleiner Süßigkeitenladen verkauft Schokoladentafeln. Die Verpackung der Schokoladentafel ist dabei ein Sammelcoupon. Gibt man drei solcher Coupons in dem Laden ab, erhält man eine Tafel gratis. Wie viele Tafeln kann man maximal erhalten, wenn man die folgenden Anzahlen kauft?
 - a) 30 Stück
 - b)  2019 Stück
4.  Ein seltsames Schachbrett mit zwei Zeilen und n Spalten soll vollständig mit insgesamt n Domino-Steinen abgedeckt werden. Dabei überdeckt ein Dominostein genau zwei benachbarte Felder, und die Dominosteine dürfen nicht über den Rand des Schachbretts hinausschauen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das Feld mit n Steinen zu überdecken?

Block 1: Codierungstheorie

1) a)

$$\begin{array}{cccccccccccc} 8 & 7 & 1 & 0 & 6 & 7 & 1 & 0 & 8 & 7 & 8 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$$8 + 21 + 1 + 0 + 6 + 21 + 1 + 0 + 8 + 21 + 8 + 12 + 3 = 110 \rightarrow \text{durch 10 teilbar} \Rightarrow \text{gültige EAN}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 9 & 0 & 0 & 9 & 7 & 7 & 7 & ? \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$$27 + 0 + 0 + 9 + 21 + 7 + 21 + ? = 85 + ?$$

Ergebnis muss durch 10 teilbar sein, $?, ? \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \Rightarrow ? = 5$

b)

$$\begin{array}{cccccccccccc} 4 & 0 & 0 & 4 & 6 & 7 & 5 & 0 & 0 & 4 & 6 & ? & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$$4 + 0 + 0 + 12 + 6 + 21 + 5 + 0 + 0 + 12 + 6 + 3 \cdot ? + 8 = 74 + 3 \cdot ? \rightarrow \text{wie oben} \Rightarrow ? = 2$$

c)

8 7 1 0 6 7 1 0 8 7 8 4 3 ist 4. Bsp 1) a) gültige EAN. Wir können

Zwei beliebige (aufeinanderfolgende) Ziffern wählen, z.B.: 43. Diese liefern einen Beitrag von $4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 15$, unsere neuen Zahlen müssen also eine Zahl mit 5 an der Einer-Stelle liefern.

$$\begin{aligned} \Rightarrow "12" &\leadsto 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5 \checkmark \\ "29" &\leadsto 2 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 15 \checkmark \\ "36" &\leadsto 3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 15 \checkmark \\ "43" &\leadsto \dots \checkmark, "50" \leadsto \checkmark, "67" \leadsto \checkmark, "74" \leadsto \checkmark \\ "81" &\leadsto \checkmark, "98" \leadsto \checkmark, "05" \leadsto \checkmark \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ es gibt viele verschiedene mögliche Lösungen!

d)

Siehe Beispiele 1) a), 1) b): da man bei einer unbekannten Stelle (egal ob mit 1 oder mit 3 gewichtet) immer die "richtige" Ziffer eindeutig errechnen kann, ist es nicht möglich dass bei Veränderung einer einzelnen Ziffer wieder ein gültiger Code entsteht

e)

Wenn zwei Ziffern a, b vertauscht werden, gibt es ein paar mögliche Fälle bzgl. dem Gewicht (mit den die Ziffern multipliziert werden):

$$\begin{aligned} 1) \text{ alt: } a \rightarrow 1, b \rightarrow 1 & \quad \text{new: } a \rightarrow 1, b \rightarrow 1 \\ & \quad a \rightarrow 3, b \rightarrow 3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \text{Die Prüfsumme ist in beiden} \\ & \Rightarrow \text{Fälle gleich, Fehler werden nicht} \\ & \quad \text{erkannt.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ alt: } a \rightarrow 1, b \rightarrow 3 & \quad \text{new: } a \rightarrow 3, b \rightarrow 1 \\ & \quad a \rightarrow 3, b \rightarrow 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \text{Die Differenz zw. den Änderungen} \\ & \rightarrow \text{muss Vielfaches von 10 sein: } a=b \\ & (1 \cdot a + 3 \cdot b) - (3 \cdot a + 1 \cdot b) \text{ geht, wenn } \\ & = 2(b-a) \rightarrow \text{b-a=0 oder b-a=5} \end{aligned}$$

1)e)
(forts.)

⇒ Beispiel: zwei
gültige EANs mit
nur 1 Zifferntausch.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccc}
 8 & 9 & & & & & & \\
 8 & 3 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\
 \hline
 3 & 8 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\
 \hline
 3 & + & 24 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 43 \rightarrow 60 \checkmark
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\
 3 & 8 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\
 \hline
 & & & & & & & & & & 43 \rightarrow 70 \checkmark
 \end{array}
 \end{array}$$

2)a)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & - & 4 & 7 & 1 & - & 9 & 8 & 2 & 3 & 2 & - & 6 \\
 10 & & 9 & 8 & 7 & & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & & 1
 \end{array}$$

⇒ ISBN ist gültig!

$$0 + 36 + 56 + 7 + 54 + 40 + 8 + 9 + 4 + 6 = 220 = 20 \cdot 11 \checkmark$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & - & 3 & 8 & 7 & - & 9 & 0 & 5 & 1 & 8 & - & [?] \\
 10 & & 9 & 8 & 7 & & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & & 1
 \end{array}$$

$$0 + 27 + 64 + 49 + 54 + 0 + 20 + 3 + 16 + ? = 233 + ? \rightarrow \text{nächstes Vielfaches von 11 nach 233 ist 242}$$

$$\Rightarrow ? = 9$$

b)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 3 & - & 5 & 4 & [?] & - & 9 & 0 & 5 & 1 & 8 & - & 9 \\
 10 & & 9 & 8 & 7 & & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & & 1
 \end{array}$$

$$30 + 45 + 32 + 7 \cdot ? + 54 + 0 + 20 + 3 + 16 + 9 = 209 + 7 \cdot ? , \quad 209 \text{ ist Vielfaches von 11} \Rightarrow ? = 0$$

c)

Ja, wie in Bsp. 1)d): Da einzelne fehlende Ziffern immer eindeutig rekonstruiert werden können, gibt es keine ISBN die durch Veränderung einer Stelle einer weiteren ISBN gewonnen wird.

d)

Ähnlich wie Bsp 1)e): hier können "Ziffernshürze" (Vertauschung benachbarter Ziffern) aber immer erkannt werden. Nicht so bei "beliebigen" Tauschen.

3)a)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{AT} & 19 & & 20 & 19 & \rightarrow & 2019 \frac{10}{A} \frac{29}{T} 19 = 20815494 \cdot 97 + 1 \\
 \downarrow & \downarrow & & & & & \\
 10 & 29 & & & & &
 \end{array}$$

$$\hookrightarrow 2019102919 : 97 = 20815494$$

1 Rest

⇒ gültige "IBAN Light" ✓

b)

$$\text{AT} 6 [?] 1234 \rightarrow 1234 \frac{10}{A} \frac{29}{T} 6 ?$$

→ Rechne mit ? = 0, schaue wie Rest aussieht:

$$1234102960 = 12722710 \cdot 97 + 90$$

⇒ 90 Rest, wir brauchen 1 Rest. ⇒ Zahl um 8 erhöhen!

$$\Rightarrow 1234102968 = 12722711 \cdot 97 + 1, \text{ also } ? = 8$$

c)

Gleich wie 3)b): Setze ?? = 00 → 56 Rest, es fehlt 42 ⇒ ?? = 42

Block 2: „Zählen ist schwer!“

- 1) a) 5 Socken für mind. 1 gleichfarbiges Paar (worst case: 4 versch. Farben + 1 Zusatz)
- b) 13 Socken (worst case: max. von einer Farbe = 12 + eine weitere)
- c) 34 Socken (worst case: alle 32 andere Socken zuerst, dann zwei grüne)
- d) 33 Socken (worst case: die 3 meisten Farben werden zuerst vollständig gezogen (=32) + eine weitere grüne Socke)

2) Die Aussage ist wahr:

- Es gibt z.B. n Personen,
- jede Person kann $0, 1, 2, 3, \dots, n-2, n-1$ Freund*innen in der Gruppe haben. (Das sind n Möglichkeiten für n Personen, das Schubfachprinzip greift also noch nicht!).

↳ Fallunterscheidung:

- ① Es gibt eine Person ohne Freund*innen in der Gruppe
 $\Rightarrow$ keine Person kann mit $n-1$ Pers. befreundet sein,
es gibt also „doch nur“ Möglichkeiten auf $0, 1, 2, \dots, n-2$
Freund*innen, das sind $n-1$ Möglk. für n Personen, also
müssen zwei die gleiche Anzahl an Freund*innen haben.

- ② Alle Personen haben zumindest 1 Freund*in in der Gruppe.
 $\Rightarrow$ Keine Person hat 0 Freund*innen, also gibt es nur
Möglichkeiten $1, 2, 3, \dots, n-1 \Rightarrow n-1$ Möglk. für n Personen,
also müssen zwei die gleiche Anzahl an Freund*innen haben.

$\Rightarrow$ Aussage bewiesen! $\square$

Aufgabe 3/4 wurde inhaltlich nicht behandelt.