Von Büchern, Tauben und den Türmen von Hanoi

Ein Streifzug durch die *Nichtschulmathematik*

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Benjamin Hackl

Wer? Und warum?

Wer?

- Matura: 8C, 2012 @ BRG Viktring
- *Bachelor-* (2014) und *Masterstudium* (2015) “Technische Mathematik” in Klagenfurt
- *Doktoratsstudium* der technischen Wissenschaften; Fachbereich “Technische Mathematik” (Mai 2018)
- Jetzt: Postdoc @ Universität Klagenfurt (Inst. f. Mathematik)

Warum?

- Mathematik, die im Unterricht keinen/wenig Platz hat. . .
- Ideen für Themen für *Vorwissenschaftliche Arbeiten!*

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Block 1

Codierungstheorie

Problem: Übertragungsfehler

- Fehler bei Datenübertragungen passieren!

$$1110110101 \quad \rightsquigarrow \quad 1110111101$$

- **Problem:** Wie erkennt/korrigiert man Fehler?
- Einfache Idee: Wiederhole Daten!

$$101 \longrightarrow 101101 \quad \rightsquigarrow \quad 101111 \longrightarrow ???$$

$$101 \longrightarrow 101101101 \quad \rightsquigarrow \quad 101111101 \longrightarrow 101$$

- Gibt es geschicktere Vorgehensweisen?

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

EAN/ISBN


ISBN 0-471-98232-6
9 780471 982326


ISBN 0-521-39791-X
780521 397919


ISBN 978-3-211-75355-2
9 783211 753552


49 02778 913963


MADE IN GERMANY
Art. Nr. 351-3
EAN 40 07817 328811
whiteboard marker


8 710671 087843

IBAN

AT42 3900 0000 0251 5039

3900 0000 0251 5039 AT42

A	10	F	15	K	20	P	25	U	30
B	11	G	16	L	21	Q	26	V	31
C	12	H	17	M	22	R	27	W	32
D	13	I	18	N	23	S	28	X	33
E	14	J	19	O	24	T	29	Y	34

3900 0000 0251 5039 102942

$$3900\,0000\,0251\,5039\,102942 = 40206185592938547453 \cdot 97 + 1$$

$10^i \mod 97$

1 68 65 55 54 83 18 60 6 20 2 39 33 13 11 69 36 23 12 40 4 78 66 26 22 41 72 46 24 80 8 59 35 52 44 82 47 92 48 63 16 21 70 7 88 67 94 87 96 29 32 42 43 14 79 37 91 77 95 58 64 84 86 28 61 74 85 57 93 19 31 71 75 56 25 51 73 17 89 38 62 45 53 15 50 5 49 34 81 76 27 90 9 30 3 10

- VWA-Themengebiete:
  - Modulare Arithmetik
  - „Lineare Codes“
  - Reed-Solomon Codes (CDs!)

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Block 2

Taubenschlagprinzip

Haariges Kärnten

- Gibt es in Kärnten **zwei Personen** (keine Glatzköpfe) mit der **gleichen Anzahl von Haaren am Kopf?**

- Einwohnerzahl Kärnten: 560.898
- Durchschnittliche Haaranzahl:
  - bei Blonden ca. 150.000
  - bei Rothaarigen ca. 80.000

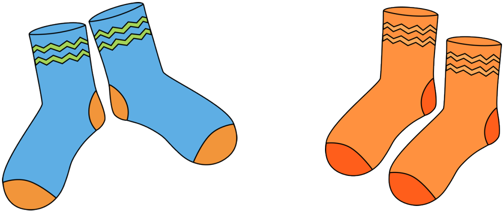
- Also **JA**: es gibt nicht genügend verschiedene „Haar-Zahlen“!

Das Taubenschlagprinzip

- Möchte man Bälle auf Schachteln verteilen, wobei es weniger Schachteln als Bälle gibt, so gibt es sicherlich eine Schachtel in der mindestens zwei Bälle sind.

Socken im Wäschetrockner

Georg hat 5 Paar blaue und 5 Paar orange Socken im Trockner. Er greift hinein ohne hinzusehen.

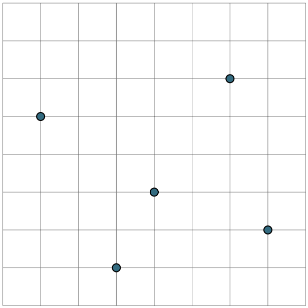


- Wie viele Socken muss er mindestens herausnehmen, um jedenfalls ein *Paar gleicher Farbe* zu haben?
- Wie viele, um jedenfalls ein *oranges Paar* zu haben?

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Fünf Punkte

Hat man fünf verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ mit ganzzahligen Koordinaten, so kann man unter diesen fünf Punkten immer zwei finden, deren Mittelpunkt erneut ganzzahlige Koordinaten hat.



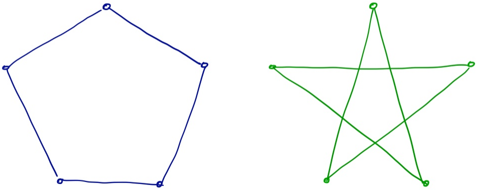
Ansatz: Summe muss gerade Koordinaten haben, untersuche Paritäten! Möglich: $g \ldots$ gerade, $u \ldots$ ungerade

$$(u, u), \quad (g, u), \quad (g, g), \quad (u, g)$$

Also: 2 Punkte vom gleichen Typ. ✓

VWA-Themengebiete

- Elementare kombinatorische Beweistechniken
  - Schubfachschluss, Beweis durch Bijektion, ...
- Anwendungen in der Informatik
  - Datenstrukturen sind kombinatorische Objekte!
- **Ramsey-Theorie**
  - *Theorem on Friends and Strangers* + mehr ...



Block 3

Folgen und Rekursionen

Erinnerung: Folgen

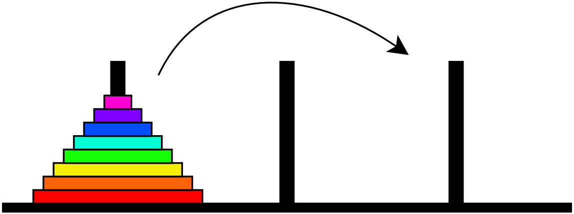
Folgen Rekursionen

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ... $a_{n+1} = a_n + 1$
- 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ... $a_{n+1} = 2a_n$
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Rekursionen können dabei helfen, „größere“ Probleme auf „kleinere“ zurückzuführen!

Türme von Hanoi

- Bewege Stapel von erster auf letzte Stange
- Eine Scheibe pro Zug
- Große Scheiben dürfen nie über kleinen Scheiben liegen



- **Frage:** Wie viele Züge werden benötigt?

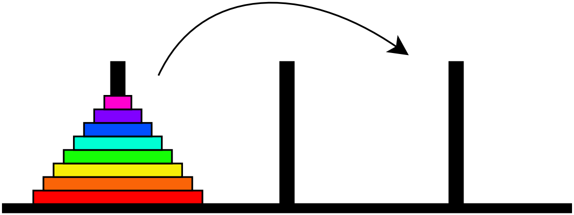
Türme von Hanoi – Ansatz

- n ... Anzahl der Scheiben, a_n ... benötigte Züge
- Eine Scheibe ($n = 1$) $\rightsquigarrow a_1 = 1$
- Zwei Scheiben ($n = 2$) $\rightsquigarrow a_2 = 3$
- Drei Scheiben ($n = 3$) $\rightsquigarrow a_3 = 7$

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Türme von Hanoi – Lösung

- Bei $n + 1$ Scheiben:
  - Bewege n oberste Scheiben auf mittleren Stapel (a_n Züge)
  - Bewege größte Scheibe auf untersten Stapel (1 Zug)
  - Bewege n oberste Scheiben auf rechten Stapel (a_n Züge)
- **Rekursion:** $a_{n+1} = 2a_n + 1$

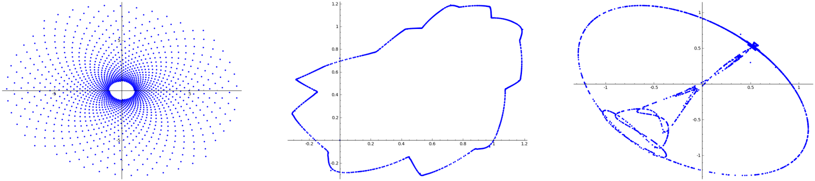


Verschränkte Folgen – Seltsame Attraktoren

- x_n, y_n hängen jeweils von ihren Vorgängern ab, zB

$$x_0 = y_0 = 6, \qquad x_{n+1} = 0.03 \cdot x_n + y_n, \quad y_{n+1} = -x_n - 0.1 \cdot y_n$$

- Zeichne Punkte (x_n, y_n): spannende Muster entstehen!



- VWA: Untersuchung von verschränkten Folgen
  - Anwendung: Räuber-Beute-Modelle!

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Binomialkoeffizient

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

- $\binom{n}{k}$ zählt Möglichkeiten, k von n verschiedenen Objekten auszuwählen

Rekursionsformel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- **Fallunterscheidung:** Wird n ausgewählt oder nicht?

Epilog

Weitere Themengebiete

- Analyse von Zwei-Personen-Strategiespielen (zB Tic-Tac-Toe und ähnliches)
- Algorithmen auf Graphen (zB kürzeste Wege, Spannbäume, ...)
- Differentialgleichungen 2. Ordnung (Motivation: Schwingungsvorgänge in Mechanik)
- Numerische Verfahren für Differentialgleichungen
- Geschichte der Mathematik (zB: Seit wann gibt es irrationale Zahlen?)

UNIVERSITÄT KLAGENFURT

Weitere Themengebiete

- Kryptographie!
  - Asymmetrische Verschlüsselungsverfahren (zB RSA)
- Finanzmathematik
  - Versicherungsmathematik
  - Preisbewertung von Finanzoptionen
  - Aktienkurse
- Mathematik und Design (Goldener Schnitt; Parkettierungen [M.C. Escher!])
- Mathematik in der Musik (Harmonielehre)

- **Mehr Nichtschulmathematik?** Mathematik-Olympiade!
  `https://www.math.aau.at/OeMO/A-Kurs/`
- **TeWi-SchülerInnenpreise** für Vorwissenschaftliche Arbeiten:
  `https://www.aau.at/schuelerinnen-und-schueler/tewi-schuelerinnenpreise/`
- **Studieren in Klagenfurt?** Tag der offenen Tür:
  15. März 2019
- **Ferialjob?** IT-Ferialpraktikum!
  `https://www.aau.at/technik-studieren/it-ferialpraktikum/`

- **Sonstige Fragen?** → `benjamin.hackl@aau.at`

Von Büchern, Tauben und den Türmen von Hanoi

Ein Streifzug durch die *Nichtschulmathematik*

UNIVERSITÄT KLAGENFURT