Die symbolische Methode

. . . oder: Wie Funktionen beim Zählen helfen können

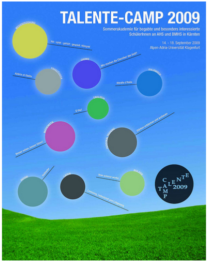
Benjamin Hackl

Fakultät für Technische Wissenschaften — Institut für Mathematik

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

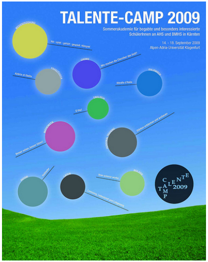
2009 – Talentecamp



Fehlerkorrigierende Codes

- Erkennung + Korrektur von Daten nach Übertragung
- Workshopwoche im September 2009

2009 – Talentecamp



Fehlerkorrigierende Codes

- Erkennung + Korrektur von Daten nach Übertragung
- Workshopwoche im September 2009

Ein Beispiel: Nachricht $m = 1011$. Mit *parity bit*: $c = 10111$.

Empfangene Nachricht: $\tilde{c} = 10101$, Fehler wird erkannt.

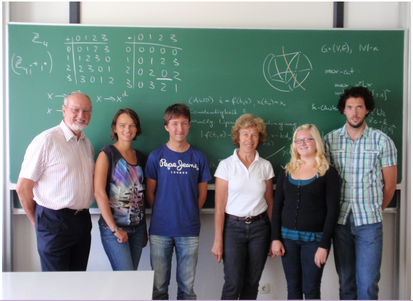
2010 – Studienbeginn und Ferialpraktika

- März 2010: *außerordentlicher* Student an der AAU

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

2010 – Studienbeginn und Ferialpraktika

- März 2010: *außerordentlicher* Student an der AAU
- Juli 2010 / 2011 / 2012: Ferialpraktikum am Institut für Mathematik



ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

2012 – "ordentlicher" Studienbeginn

- Juni 2012: Schulabschluss

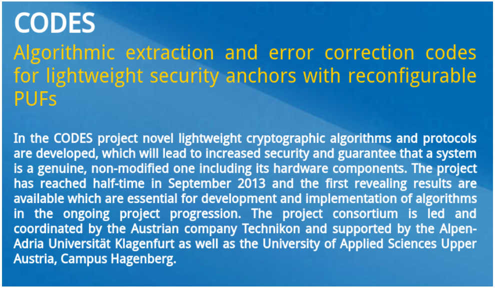
ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

2012 – "ordentlicher" Studienbeginn

- Juni 2012: Schulabschluss
- Oktober 2012: ordentlicher Student ("Technische Mathematik") an der AAU

2012 – “ordentlicher” Studienbeginn

- Juni 2012: Schulabschluss
- Oktober 2012: ordentlicher Student (“Technische Mathematik”) an der AAU
- Außerdem: Beginn als Projektassistent im Projekt **CODES**



Projekt **CODES**

- **AAU**, FH Hagenberg, Fa. Technikon

Projekt **CODES**

- **AAU**, FH Hagenberg, Fa. Technikon
- Auswahl, Studium und Implementation geeigneter fehlerkorrigierender Codes:

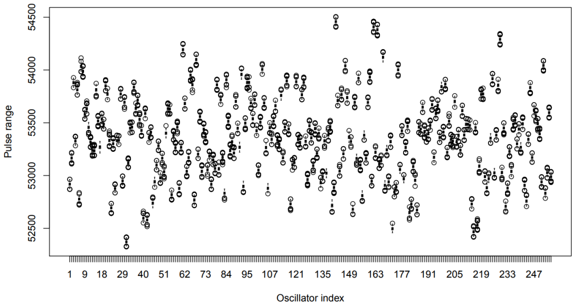
Projekt **CODES**

- **AAU**, FH Hagenberg, Fa. Technikon
- Auswahl, Studium und Implementation geeigneter fehlerkorrigierender Codes:
  - PUFs ("Physically Unclonable Functions"): Challenge $\rightsquigarrow$ Response

FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Projekt **CODES**

- **AAU**, FH Hagenberg, Fa. Technikon
- Auswahl, Studium und Implementation geeigneter fehlerkorrigierender Codes:
  - PUFs ("Physically Unclonable Functions"): Challenge $\rightsquigarrow$ Response
  - Weil Hardware: Response fehlerbehaftet!



ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

2014 bis jetzt

- Juni 2014: Abschluss Bachelorstudium
  - Bachelorarbeit: **Concatenated Error Correcting Codes: Galois and Binary Concatenation**

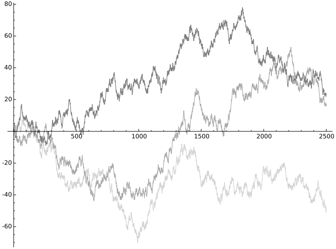
2014 bis jetzt

- Juni 2014: Abschluss Bachelorstudium
  - Bachelorarbeit: **Concatenated Error Correcting Codes: Galois and Binary Concatenation**
- Mai 2015: *Google Summer of Code* – (Multivariate) Asymptotic Expressions in SageMath

2014 bis jetzt

- Juni 2014: Abschluss Bachelorstudium
  - Bachelorarbeit: **Concatenated Error Correcting Codes: Galois and Binary Concatenation**
- Mai 2015: *Google Summer of Code* – (Multivariate) Asymptotic Expressions in SageMath
- August 2015: Abschluss Masterstudium
  - Masterarbeit: **Asymptotic Analysis of Lattice Paths and Related Structures**

Google SUMMER of CODE 2015

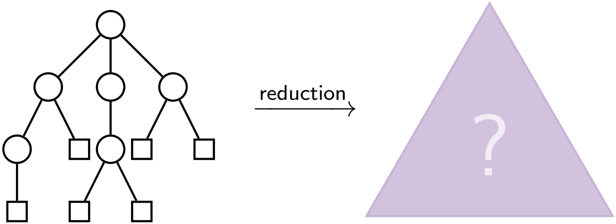


Status quo

- Doktorand im Bereich **Technische Mathematik**, betreut von Prof. Clemens Heuberger

Status quo

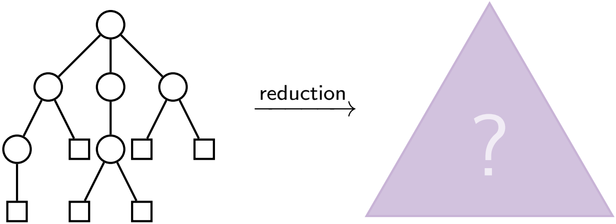
- Doktorand im Bereich **Technische Mathematik**, betreut von Prof. Clemens Heuberger
- Dissertationsprojekt: **Asymptotic Analysis of recursively generated Structures**



ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Status quo

- Doktorand im Bereich **Technische Mathematik**, betreut von Prof. Clemens Heuberger
- Dissertationsprojekt: **Asymptotic Analysis of recursively generated Structures**
- Projektassistent im FWF-Projekt P24644-N26 **Asymptotic Analysis of Extremal Discrete Structures**



ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Einblicke in den Alltag

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Eine Auswahl von Aufgaben

- Arbeit an der Dissertation = Forschung **(!)**

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Eine Auswahl von Aufgaben

- Arbeit an der Dissertation = Forschung **(!)**
- Lehre ($\approx$ 2 SWS) + Supplierung

Eine Auswahl von Aufgaben

- Arbeit an der Dissertation = Forschung **(!)**

- Lehre ($\approx$ 2 SWS) + Supplierung
- Mitglied im PR-Team des Institutes

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Eine Auswahl von Aufgaben

- Arbeit an der Dissertation = Forschung **(!)**
- Lehre ($\approx$ 2 SWS) + Supplierung
- Mitglied im PR-Team des Institutes
  - Entwicklung und Diskussion von PR-Strategien

Alpen-Adria Universität Klagenfurt | Wien Graz
Fakultät für Technische Wissenschaften

Eine Auswahl von Aufgaben

- Arbeit an der Dissertation = Forschung **(!)**

- Lehre ($\approx$ 2 SWS) + Supplierung
- Mitglied im PR-Team des Institutes
  - Entwicklung und Diskussion von PR-Strategien
  - Verantwortlich für `https://www.aau.at/mathematik`

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Eine Auswahl von Aufgaben

- Arbeit an der Dissertation = Forschung **(!)**

- Lehre ($\approx$ 2 SWS) + Supplierung
- Mitglied im PR-Team des Institutes
  - Entwicklung und Diskussion von PR-Strategien
  - Verantwortlich für `https://www.aau.at/mathematik`
- Betreuung von FerialpraktikantInnen, siehe
  - `https://www.math.aau.at/LNdF-2016`
  - `https://www.math.aau.at/coloring`

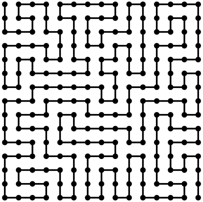
ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Um was geht es überhaupt? Und warum?

- **Kombinatorik:** "Lehre vom Abzählen"

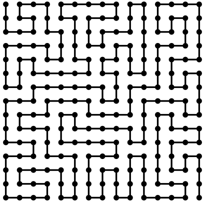
Um was geht es überhaupt? Und warum?

- **Kombinatorik:** “Lehre vom Abzählen”
- Untersuchen von (diskreten) Strukturen:
  - Aufbau
  - Wachstum
  - Teilstrukturen



ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Um was geht es überhaupt? Und warum?

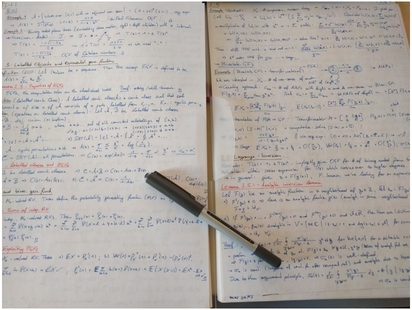


- **Kombinatorik:** "Lehre vom Abzählen"
- Untersuchen von (diskreten) Strukturen:
  - Aufbau
  - Wachstum
  - Teilstrukturen

- **Anwendungsbereiche:** *Informatik*, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, *Algebra*, *Mengenlehre*, ...

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

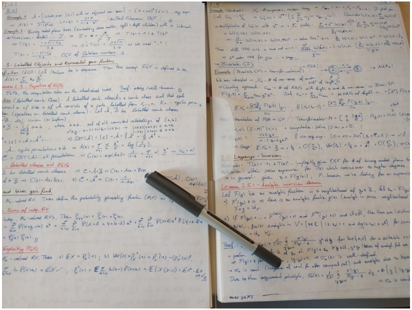
Methodik



Stift + Papier

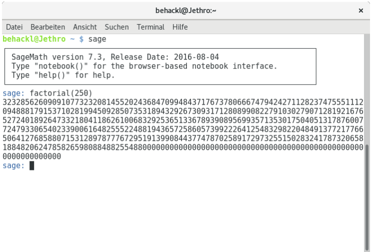
☺

Methodik



Stift + Papier

☺



Open-Source Mathematiksoftware

`SageMath`

Permutationen

Q: Fünf verschiedene Bücher stehen der Reihe nach in einem Regal. Wie viele mögliche Anordnungen der Bücher gibt es?

FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Permutationen

Q: Fünf verschiedene Bücher stehen der Reihe nach in einem Regal. Wie viele mögliche Anordnungen der Bücher gibt es?

A: **5** Plätze für erstes Buch, **4** für zweites, . . .

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Permutationen

Q: Fünf verschiedene Bücher stehen der Reihe nach in einem Regal. Wie viele mögliche Anordnungen der Bücher gibt es?

A: **5** Plätze für erstes Buch, **4** für zweites, ...

$$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Permutationen

Q: Fünf verschiedene Bücher stehen der Reihe nach in einem Regal. Wie viele mögliche Anordnungen der Bücher gibt es?

A: **5** Plätze für erstes Buch, **4** für zweites, ...

$$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \boldsymbol{= 5!}$$

Permutationen

Q: Fünf verschiedene Bücher stehen der Reihe nach in einem Regal. Wie viele mögliche Anordnungen der Bücher gibt es?

A: **5** Plätze für erstes Buch, **4** für zweites, ...

$$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \mathbf{= 5!}$$

- n **verschiedene** Objekte $\rightsquigarrow n \cdots 2 \cdot 1 = n!$ *Permutationen*

Nicht unterscheidbare Objekte

Q: Ein Gärtner pflanzt 12 Blumen in einer Reihe. Er hat 5 lila, 4 rote und 3 blaue Blumen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er sie zu pflanzen?

Nicht unterscheidbare Objekte

Q: Ein Gärtner pflanzt 12 Blumen in einer Reihe. Er hat 5 lila, 4 rote und 3 blaue Blumen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er sie zu pflanzen?

A: Wenn alle Blumen unterscheidbar: 12! Anordnungen.

Nicht unterscheidbare Objekte

Q: Ein Gärtner pflanzt 12 Blumen in einer Reihe. Er hat 5 lila, 4 rote und 3 blaue Blumen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er sie zu pflanzen?

A: Wenn alle Blumen unterscheidbar: 12! Anordnungen. Gleichfarbige Blumen untereinander tauschen: $5! \cdot 4! \cdot 3!$ mögliche Anordnungen.

Nicht unterscheidbare Objekte

Q: Ein Gärtner pflanzt 12 Blumen in einer Reihe. Er hat 5 lila, 4 rote und 3 blaue Blumen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er sie zu pflanzen?

A: Wenn alle Blumen unterscheidbar: 12! Anordnungen. Gleichfarbige Blumen untereinander tauschen: $5! \cdot 4! \cdot 3!$ mögliche Anordnungen. $\Rightarrow \frac{12!}{5!\,4!\,3!} = \binom{12}{5;4;3}$

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Nicht unterscheidbare Objekte

Q: Ein Gärtner pflanzt 12 Blumen in einer Reihe. Er hat 5 lila, 4 rote und 3 blaue Blumen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er sie zu pflanzen?

A: Wenn alle Blumen unterscheidbar: 12! Anordnungen. Gleichfarbige Blumen untereinander tauschen: $5! \cdot 4! \cdot 3!$ mögliche Anordnungen.$\Rightarrow \frac{12!}{5!\,4!\,3!} = \binom{\mathbf{12}}{\mathbf{5;4;3}}$

- $n = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ Objekte, jeweils c_j gleiche Objekte vom Typ $j \rightsquigarrow \frac{n!}{c_1!\,c_2!\cdots c_k!}$ Anordnungen.

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)

A: Position der ersten Person: $\cancel{6}$ **1** Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person,... $\Rightarrow 5!$,

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)

A: Position der ersten Person: $\cancel{6}$ **1** Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person,... $\Rightarrow$ 5!, aber: Reihenfolge der Sitznachbarn darf sich ändern (Spiegelung!)

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)

A: Position der ersten Person: $\cancel{6}$ **1** Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person,... $\Rightarrow 5!$, aber: Reihenfolge der Sitznachbarn darf sich ändern (Spiegelung!)$\Rightarrow 5!/2 = 60$ Sitzordnungen.

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)

A: Position der ersten Person: $\cancel{6}$ **1** Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person,... $\Rightarrow 5!$, aber: Reihenfolge der Sitznachbarn darf sich ändern (Spiegelung!)$\Rightarrow 5!/2 = 60$ Sitzordnungen.

- Zirkuläre Anordnung von n Personen am Kreis:

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)

A: Position der ersten Person: ~~6~~ **1** Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person,... $\Rightarrow 5!$, aber: Reihenfolge der Sitznachbarn darf sich ändern (Spiegelung!)$\Rightarrow 5!/2 = 60$ Sitzordnungen.

- Zirkuläre Anordnung von n Personen am Kreis:
  - $(n-1)!$ bei fester Reihenfolge,

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)

A: Position der ersten Person: $\cancel{6}$ **1** Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person,... $\Rightarrow 5!$, aber: Reihenfolge der Sitznachbarn darf sich ändern (Spiegelung!)$\Rightarrow 5!/2 = 60$ Sitzordnungen.

- Zirkuläre Anordnung von n Personen am Kreis:
  - $(n-1)!$ bei fester Reihenfolge,
  - $(n-1)!/2$ bei gleichen Nachbarn.

Mehrfachauswahl; Worte

Q: Auf wie viele Arten können 10 Goldbären (verfügbar: , , ) hintereinander aufgestellt werden?

Mehrfachauswahl; Worte

Q: Auf wie viele Arten können 10 Goldbären (verfügbar: , , ) hintereinander aufgestellt werden?

A: **3** Möglichkeiten für jede Position

Mehrfachauswahl; Worte

Q: Auf wie viele Arten können 10 Goldbären (verfügbar: , , ) hintereinander aufgestellt werden?

A: **3** Möglichkeiten für jede Position $\Rightarrow 3^{10} = 59049$.

Mehrfachauswahl; Worte

Q: Auf wie viele Arten können 10 Goldbären (verfügbar: , , ) hintereinander aufgestellt werden?

A: **3** Möglichkeiten für jede Position $\Rightarrow 3^{10} = 59049$.

- "Worte" der Länge n über "Alphabet" mit a Buchstaben: a^n.

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- $\mathcal{C}$ ... *(abzählbare) Menge*

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- $\mathcal{C}$ ... *(abzählbare) Menge*
- $|\cdot|: \mathcal{C} \to \mathbb{N}_0$ *ein "Größenmesser" der Elemente in* $\mathcal{C}$

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- $\mathcal{C}$ ... *(abzählbare) Menge*
- $|\cdot|: \mathcal{C} \to \mathbb{N}_0$ *ein "Größenmesser" der Elemente in* $\mathcal{C}$
- $|\{\gamma \in \mathcal{C} : |\gamma| = n\}| < \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- $\mathcal{C}$ ... *(abzählbare) Menge*
- $|\cdot|: \mathcal{C} \to \mathbb{N}_0$ *ein "Größenmesser" der Elemente in* $\mathcal{C}$
- $|\{\gamma \in \mathcal{C} : |\gamma| = n\}| < \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$

Dann heißt $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ *eine* **kombinatorische Klasse**.

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- $\mathcal{C}$ ... *(abzählbare) Menge*
- $|\cdot|: \mathcal{C} \to \mathbb{N}_0$ *ein "Größenmesser" der Elemente in* $\mathcal{C}$
- $|\{\gamma \in \mathcal{C} : |\gamma| = n\}| < \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$

Dann heißt $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ *eine* **kombinatorische Klasse**.

- Konkret: Elemente in $\mathcal{C}$ haben eine Größe, und es gibt nur endlich viele Elemente einer gegebenen Größe

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- $\mathcal{C}$ ... *(abzählbare) Menge*
- $|\cdot|: \mathcal{C} \to \mathbb{N}_0$ *ein "Größenmesser" der Elemente in* $\mathcal{C}$
- $|\{\gamma \in \mathcal{C} : |\gamma| = n\}| < \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$

Dann heißt $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ *eine* **kombinatorische Klasse**.

- Konkret: Elemente in $\mathcal{C}$ haben eine Größe, und es gibt nur endlich viele Elemente einer gegebenen Größe
- Konvention:

kombinatorische Klasse $\mathcal{C} \leftrightsquigarrow c_n \ldots \#$ Elemente der Größe n

Beispiel: Goldbär-Worte

- $\mathcal{G} = \{$, , $\}$ mit $|g| = 1$ für $g \in \mathcal{G}$

Beispiel: Goldbär-Worte

- $\mathcal{G} = \{$, , $\}$ mit $|g| = 1$ für $g \in \mathcal{G}$
  - Zählfolge g_n: 0, **3**, 0, 0, ...

Beispiel: Goldbär-Worte

- $\mathcal{G} = \{$, , $\}$ mit $|g| = 1$ für $g \in \mathcal{G}$
  - Zählfolge g_n: 0, **3**, 0, 0, ...
- $\mathcal{W}_5$ ... Folgen von bis zu 5 Goldbären (Worte über Alphabet $\mathcal{G}$ mit Länge ≤ 5)

Beispiel: Goldbär-Worte

- $\mathcal{G} = \{$, , $\}$ mit $|g| = 1$ für $g \in \mathcal{G}$
  - Zählfolge g_n: 0, **3**, 0, 0, ...
- $\mathcal{W}_5$ ... Folgen von bis zu 5 Goldbären (Worte über Alphabet $\mathcal{G}$ mit Länge ≤ 5)

$$\mathcal{W}_5 = \{\varepsilon,$$

Beispiel: Goldbär-Worte

- $\mathcal{G} = \{$, , $\}$ mit $|g| = 1$ für $g \in \mathcal{G}$
  - Zählfolge g_n: 0, **3**, 0, 0, ...
- $\mathcal{W}_5$ ... Folgen von bis zu 5 Goldbären (Worte über Alphabet $\mathcal{G}$ mit Länge ≤ 5)

$\mathcal{W}_5 = \{\varepsilon,$ , , ,

Beispiel: Goldbär-Worte

- $\mathcal{G} = \{$  $\}$ mit $|g| = 1$ für $g \in \mathcal{G}$
  - Zählfolge g_n: 0, **3**, 0, 0, ...
- $\mathcal{W}_5$ ... Folgen von bis zu 5 Goldbären (Worte über Alphabet $\mathcal{G}$ mit Länge ≤ 5)

$\mathcal{W}_5 = \{\varepsilon,$  $, \ldots$

Beispiel: Goldbär-Worte

- $\mathcal{G} = \{$, , $\}$ mit $|g| = 1$ für $g \in \mathcal{G}$
  - Zählfolge g_n: 0, **3**, 0, 0, ...
- $\mathcal{W}_5$ ... Folgen von bis zu 5 Goldbären (Worte über Alphabet $\mathcal{G}$ mit Länge ≤ 5)

$\mathcal{W}_5 = \{\varepsilon,$ , , , , , , , $\ldots,$ $\}$

Beispiel: Goldbär-Worte

- $\mathcal{G} = \{$, , $\}$ mit $|g| = 1$ für $g \in \mathcal{G}$
  - Zählfolge g_n: 0, **3**, 0, 0, …
- $\mathcal{W}_5$ … Folgen von bis zu 5 Goldbären (Worte über Alphabet $\mathcal{G}$ mit Länge ≤ 5)

$\mathcal{W}_5 = \{\varepsilon,$ , , , , , , , $\ldots,$  $\}$

  - Größenmesser $|\cdot|$: Anzahl Goldbären / Wortlänge

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Beispiel: Goldbär-Worte

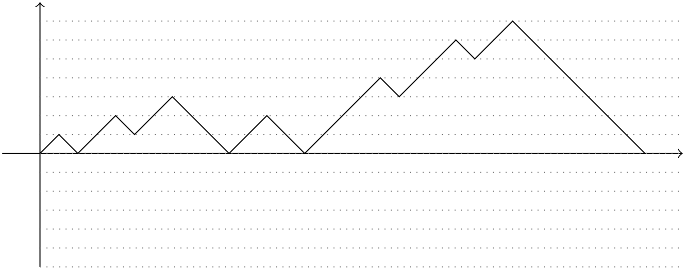
- $\mathcal{G} = \{$  $\}$ mit $|g| = 1$ für $g \in \mathcal{G}$
  - Zählfolge g_n: 0, **3**, 0, 0, ...
- $\mathcal{W}_5$ ... Folgen von bis zu 5 Goldbären (Worte über Alphabet $\mathcal{G}$ mit Länge ≤ 5)

$$\mathcal{W}_5 = \{\varepsilon,$$  $$\}$$

  - Größenmesser $|\cdot|$: Anzahl Goldbären / Wortlänge
  - Zählfolge w_n: 1, 3, 9, 27, 81, 0, 0, ...

Beispiel: Dyck-Pfade

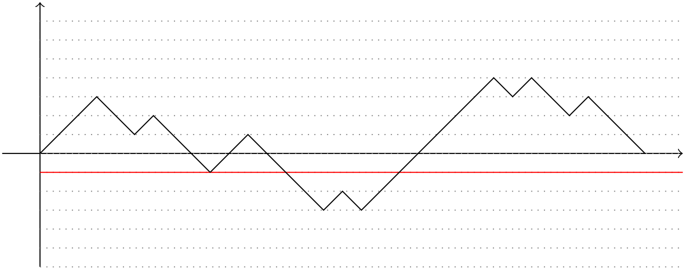
- **Dyck-Pfade** $\mathcal{D}$:
  - Folgen aus $\nearrow$, $\searrow$
  - Nie unter der x-Achse, Ende auf der Achse



Strategie: $\#\nearrow = \#\searrow$; ziehe "schlechte Pfade" ab!

Beispiel: Dyck-Pfade

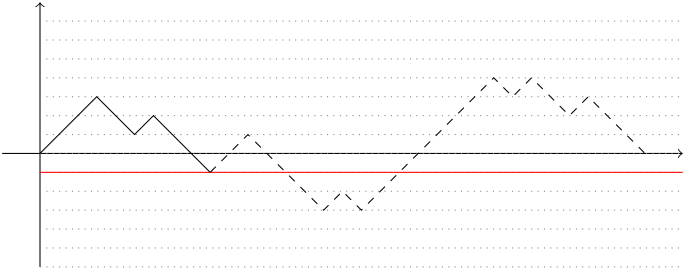
- **Dyck-Pfade** $\mathcal{D}$:
  - Folgen aus $\nearrow$, $\searrow$
  - Nie unter der x-Achse, Ende auf der Achse



Strategie: $\#\nearrow = \#\searrow$; ziehe "schlechte Pfade" ab!

Beispiel: Dyck-Pfade

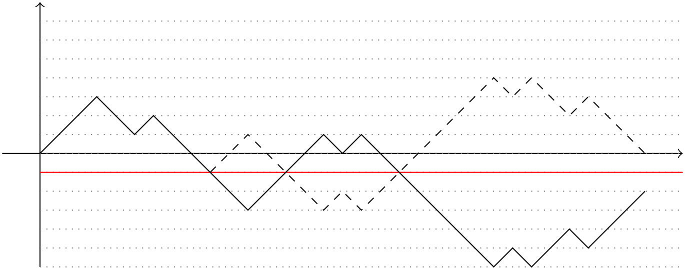
- **Dyck-Pfade** $\mathcal{D}$:
  - Folgen aus $\nearrow$, $\searrow$
  - Nie unter der x-Achse, Ende auf der Achse



Strategie: $\#\nearrow = \#\searrow$; ziehe "schlechte Pfade" ab!

Beispiel: Dyck-Pfade

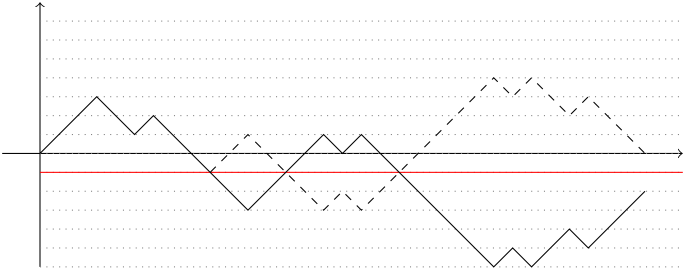
- **Dyck-Pfade $\mathcal{D}$:**
  - Folgen aus $\nearrow$, $\searrow$
  - Nie unter der x-Achse, Ende auf der Achse



Strategie: $\#\nearrow = \#\searrow$; ziehe "schlechte Pfade" ab!

Beispiel: Dyck-Pfade

- **Dyck-Pfade** $\mathcal{D}$:
  - Folgen aus $\nearrow$, $\searrow$
  - Nie unter der x-Achse, Ende auf der Achse

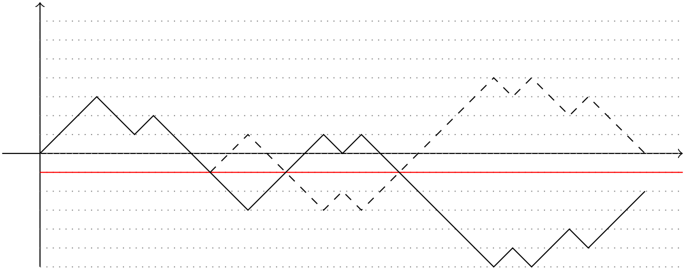


Strategie: $\#\nearrow = \#\searrow$; ziehe "schlechte Pfade" ab!

$$\Rightarrow \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = d_n$$

Beispiel: Dyck-Pfade

- **Dyck-Pfade** $\mathcal{D}$:
  - Folgen aus $\nearrow$, $\searrow$
  - Nie unter der x-Achse, Ende auf der Achse

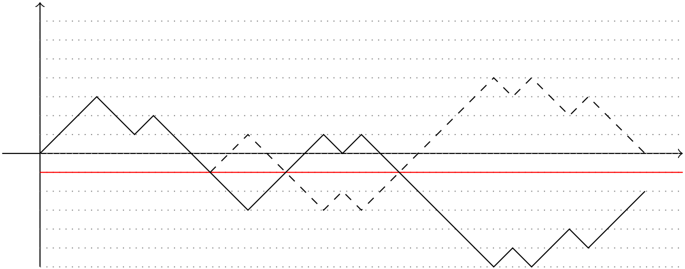


Strategie: $\#\nearrow = \#\searrow$; ziehe "schlechte Pfade" ab!

$\Rightarrow \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \mathbf{C_n} \ldots$ Catalan-Zahlen

Beispiel: Dyck-Pfade

- **Dyck-Pfade** $\mathcal{D}$:
  - Folgen aus $\nearrow$, $\searrow$
  - Nie unter der x-Achse, Ende auf der Achse



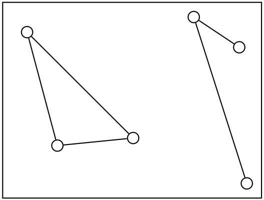
Strategie: $\#\nearrow\ = \#\searrow$; ziehe "schlechte Pfade" ab!

$\Rightarrow \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \mathbf{C_n}$ . . . Catalan-Zahlen

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, \ldots$$

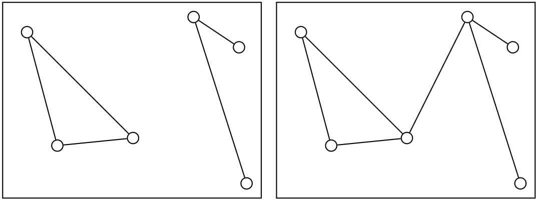
Beispiel: Bäume – 1

- **Graph:** $V \ldots$ Knotenmenge, $E \ldots$ Kantenmenge
  $\Rightarrow G = (V, E) \ldots$ Graph



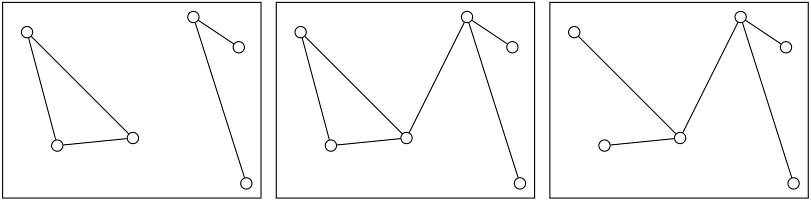
Beispiel: Bäume – 1

- **Graph:** $V \dots$ Knotenmenge, $E \dots$ Kantenmenge
  $\Rightarrow G = (V, E) \dots$ Graph
- **Zusammenhängender Graph:** jeder Knoten erreichbar



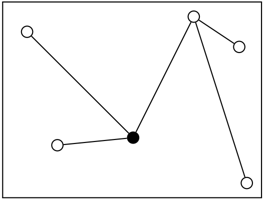
Beispiel: Bäume – 1

- **Graph:** $V \ldots$ Knotenmenge, $E \ldots$ Kantenmenge
  $\Rightarrow G = (V, E) \ldots$ Graph
- **Zusammenhängender Graph:** jeder Knoten erreichbar
- **Baum:** Zusammenhängender Graph ohne Kreise



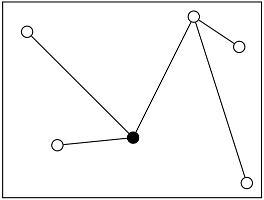
Beispiel: Bäume – 2

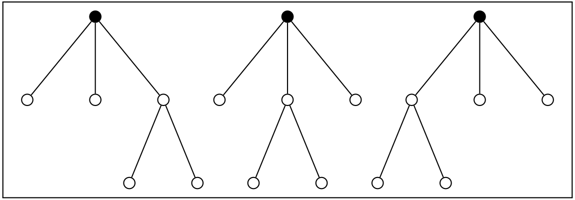
- **Gewurzelter Baum:** Baum mit einem Spezialknoten (Wurzel)



Beispiel: Bäume – 2

- **Gewurzelter Baum:** Baum mit einem Spezialknoten (Wurzel)
- **Geordneter Wurzelbaum:** Gewurzelter Baum mit geordneten Kindern

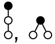




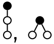
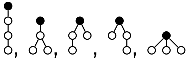
Beispiel: Bäume – 3

- $\mathcal{G}$... Klasse der geordneten Wurzelbäume. Bäume mit n Knoten...

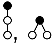
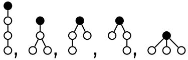
Beispiel: Bäume – 3

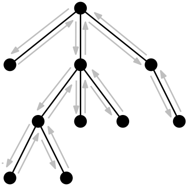
- $\mathcal{G}\ldots$ Klasse der geordneten Wurzelbäume. Bäume mit n Knoten...
  - $g_1 = g_2 = 1$, $g_3 = 2 \rightsquigarrow$ 

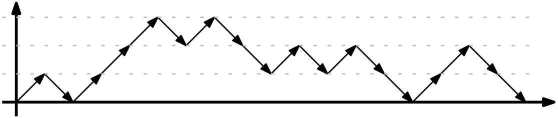
Beispiel: Bäume – 3

- $\mathcal{G}$... Klasse der geordneten Wurzelbäume. Bäume mit n Knoten...
  - $g_1 = g_2 = 1$, $g_3 = 2 \rightsquigarrow$ 
  - $g_4 = 5 \rightsquigarrow$ 

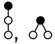
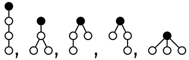
Beispiel: Bäume – 3

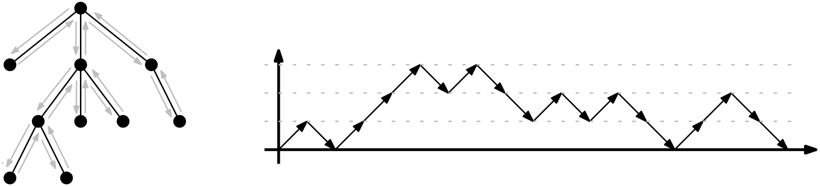
- $\mathcal{G}$. . . Klasse der geordneten Wurzelbäume. Bäume mit n Knoten. . .
  - $g_1 = g_2 = 1$, $g_3 = 2 \rightsquigarrow$ 
  - $g_4 = 5 \rightsquigarrow$ 
- Allgemein? $\rightsquigarrow$ Handschuhbijektion!





Beispiel: Bäume – 3

- $\mathcal{G}$... Klasse der geordneten Wurzelbäume. Bäume mit n Knoten...
  - $g_1 = g_2 = 1$, $g_3 = 2 \rightsquigarrow$ 
  - $g_4 = 5 \rightsquigarrow$ 
- Allgemein? $\rightsquigarrow$ Handschuhbijektion!



- Damit: Geordneter Wurzelbaum mit n Knoten $\simeq$ Dyck-Pfad mit $2n-2$ Schritten $\Rightarrow$ $\mathbf{g_n = C_{n-1}}$

Operationen mit kombinatorischen Klassen

- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ . . . kombinatorische Klassen

Operationen mit kombinatorischen Klassen

- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$... kombinatorische Klassen
- **Disjunkte Addition:** $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ enthält alle Objekte aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
  - Beispiel: $\mathcal{A} = \{\square, \square\!\square\}$, $\mathcal{B} = \{\boxminus\} \Rightarrow \mathcal{A}+\mathcal{B} = \{\square, \square\!\square, \boxminus\}$

Operationen mit kombinatorischen Klassen

- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$... kombinatorische Klassen
- **Disjunkte Addition:** $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ enthält alle Objekte aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
  - Beispiel: $\mathcal{A}=\{$$,$$\}$, $\mathcal{B}=\{$$\} \Rightarrow \mathcal{A}+\mathcal{B}=\{$$,$$,$$\}$
- **Kartesisches Produkt:** $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ ... alle Objekt-Kombinationen
  - Beispiel: $\mathcal{A}=\mathcal{B}=\{$$,$$\} \Rightarrow \mathcal{A}\times\mathcal{B}=\{$$,$$,$$,$$\}$

Operationen mit kombinatorischen Klassen

- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. . . kombinatorische Klassen
- **Disjunkte Addition:** $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ enthält alle Objekte aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
  - Beispiel: $\mathcal{A} = \{\square, \square\!\square\}$, $\mathcal{B} = \{\boxminus\} \Rightarrow \mathcal{A}+\mathcal{B} = \{\square, \square\!\square, \boxminus\}$
- **Kartesisches Produkt:** $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . . . alle Objekt-Kombinationen
  - Beispiel: $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{\square, \boxminus\} \Rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{\square\!\square, \square\!\boxminus, \boxminus\!\square, \boxminus\!\boxminus\}$
- **Folgenbildung:** $\varepsilon \notin \mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}^* = \{\varepsilon\} + \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^3 + \ldots$$

  - Beispiel: $\mathcal{A} = \{\square\} \Rightarrow \mathcal{A}^* = \{\emptyset, \square, \square\!\square, \square\!\square\!\square, \square\!\square\!\square\!\square, \ldots\}$

Auffrischung: Geometrische Reihe

- Betrachte $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$. Einfacherer Ausdruck gesucht!

Auffrischung: Geometrische Reihe

- Betrachte $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$. Einfacherer Ausdruck gesucht!
- Trick: Multipliziere mit q, also

$$Sq = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n+1}.$$

Auffrischung: Geometrische Reihe

- Betrachte $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$. Einfacherer Ausdruck gesucht!
- Trick: Multipliziere mit q, also

$$Sq = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n+1}.$$

- Offenbar gilt

$$\begin{aligned} S - Sq &= 1 + q - q + q^2 - q^2 + \ldots + q^n - q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Auffrischung: Geometrische Reihe

- Betrachte $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$. Einfacherer Ausdruck gesucht!
- Trick: Multipliziere mit q, also

$$Sq = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n+1}.$$

- Offenbar gilt

$$\begin{aligned} S - Sq &= 1 + q - q + q^2 - q^2 + \ldots + q^n - q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

- Also: $S(1-q) = 1 - q^{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Mehr geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Mehr geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Analysis: wenn $|q| < 1$ und $n \to \infty$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Mehr geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- Analysis: wenn $|q| < 1$ und $n \to \infty$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
- Algebra: q bleibt **unbestimmt**, allgemein gilt

$$\frac{1}{1-☼} = 1 + ☼ + ☼^2 + ☼^3 + ☼^4 + \dots$$

Mehr geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- Analysis: wenn $|q| < 1$ und $n \to \infty$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
- Algebra: q bleibt **unbestimmt**, allgemein gilt

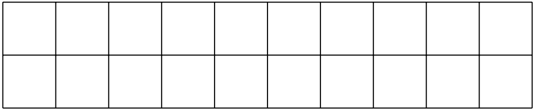
$$\frac{1}{1-☼} = 1 + ☼ + ☼^2 + ☼^3 + ☼^4 + \dots$$

  - Algebra: **formale Potenzreihe**
  - Analysis: **Reihenentwicklung**

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

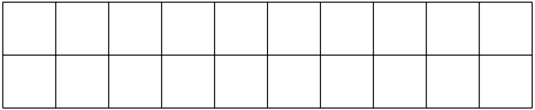
Spielen mit Dominos – 1

Q: # Möglichkeiten f_n um ein $2 \times n$-Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



Spielen mit Dominos – 1

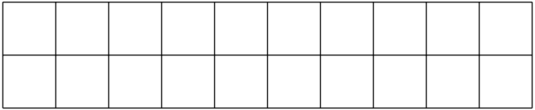
Q: # Möglichkeiten f_n um ein $2 \times n$-Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



- $n = 1 \rightsquigarrow f_1 = 1$:

Spielen mit Dominos – 1

Q: # Möglichkeiten f_n um ein $2 \times n$-Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?

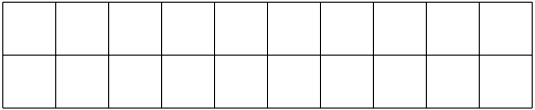


- $n = 1 \rightsquigarrow f_1 = 1$:
- $n = 2 \rightsquigarrow f_2 = 2$: ,

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Spielen mit Dominos – 1

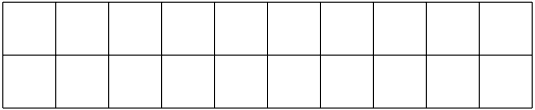
Q: # Möglichkeiten f_n um ein $2 \times n$-Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



- $n = 1 \rightsquigarrow f_1 = 1$:
- $n = 2 \rightsquigarrow f_2 = 2$: ,
- $n = 3 \rightsquigarrow f_3 = 3$: , ,

Spielen mit Dominos – 1

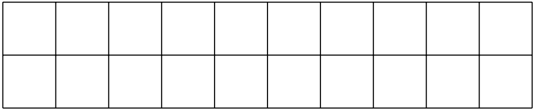
Q: # Möglichkeiten f_n um ein $2 \times n$-Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



- $n = 1 \rightsquigarrow f_1 = 1$: 
- $n = 2 \rightsquigarrow f_2 = 2$: 
- $n = 3 \rightsquigarrow f_3 = 3$: 
- $n = 4 \rightsquigarrow f_4 = 5$: 

Spielen mit Dominos – 1

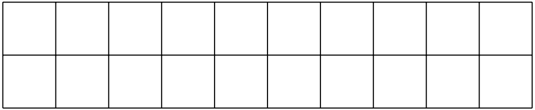
Q: # Möglichkeiten f_n um ein $2 \times n$-Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



- $n = 1 \rightsquigarrow f_1 = 1$: 
- $n = 2 \rightsquigarrow f_2 = 2$: 
- $n = 3 \rightsquigarrow f_3 = 3$: 
- $n = 4 \rightsquigarrow f_4 = 5$: 
- $\mathbf{n = 0} \rightsquigarrow f_0 = 1$: $\emptyset$

Spielen mit Dominos – 1

Q: # Möglichkeiten f_n um ein $2 \times n$-Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



- $n = 1 \rightsquigarrow f_1 = 1$:
- $n = 2 \rightsquigarrow f_2 = 2$: ,
- $n = 3 \rightsquigarrow f_3 = 3$: , ,
- $n = 4 \rightsquigarrow f_4 = 5$: , , , ,
- $\mathbf{n = 0} \rightsquigarrow f_0 = 1$: $\emptyset$

Allgemeiner Ansatz?

Spielen mit Dominos – 2

- Wir “rechnen” mit Dominos: $▯ \cdot ▯ = ▯▯$, $⊟ \cdot \emptyset = ⊟$, usw.

Spielen mit Dominos – 2

- Wir "rechnen" mit Dominos: $\square \cdot \square = \square\square$, $\boxminus \cdot \emptyset = \boxminus$, usw.
- Addition einfach stehenlassen (vorerst)

Spielen mit Dominos – 2

- Wir “rechnen” mit Dominos: $\square \cdot \square = \square\square$, $\boxminus \cdot \emptyset = \boxminus$, usw.
- Addition einfach stehenlassen (vorerst)
- Wir untersuchen jetzt

$$F = \emptyset + \square + \square\square + \boxminus + \square\square\square + \boxminus\square + \square\boxminus + \square\square\square\square + \cdots .$$

Spielen mit Dominos – 2

- Wir “rechnen” mit Dominos: $\Box \cdot \Box = \Box\Box$, $\boxminus \cdot \emptyset = \boxminus$, usw.
- Addition einfach stehenlassen (vorerst)
- Wir untersuchen jetzt

$$F = \emptyset + \Box + \Box\Box + \boxminus + \Box\Box\Box + \boxminus\Box + \Box\boxminus + \Box\Box\Box\Box + \cdots .$$

- F repräsentiert alle Überdeckungen!

Spielen mit Dominos – 2

- Wir “rechnen” mit Dominos: $▯ \cdot ▯ = ▯▯$, $⊟ \cdot ∅ = ⊟$, usw.
- Addition einfach stehenlassen (vorerst)
- Wir untersuchen jetzt

$$F = ∅ + ▯ + ▯▯ + ⊟ + ▯▯▯ + ⊟▯ + ▯⊟ + ▯▯▯▯ + \cdots .$$

- F repräsentiert alle Überdeckungen!
- In F stecken Muster: hebe $▯$ bzw. $⊟$ wo möglich heraus!

$$\begin{aligned} \Rightarrow F &= ∅ + ▯ \cdot (∅ + ▯ + ▯▯ + ⊟ + \ldots) + ⊟ \cdot (∅ + ▯ + ▯▯ + ⊟ + \ldots) \\ &= ∅ + ▯ \cdot F + ⊟ \cdot F \end{aligned}$$

Spielen mit Dominos – 3

- Weiterrechnen:

$$F = \cancel{\square} + \square \cdot F + \boxminus \cdot F \quad \Longleftrightarrow \quad F = \frac{\cancel{\square}}{1 - \square - \boxminus}$$

Spielen mit Dominos – 3

- Weiterrechnen:

$$F = \varnothing + \square \cdot F + \boxminus \cdot F \qquad \Longleftrightarrow \qquad F = \frac{\varnothing}{1 - \square - \boxminus}$$

- Geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} F = \frac{\varnothing}{1 - (\square + \boxminus)} &= \varnothing + \varnothing \cdot (\square + \boxminus) + \varnothing \cdot (\square + \boxminus)^2 + \dots \\ &= \varnothing + (\square + \boxminus) + (\square\square + \square\boxminus + \boxminus\square + \boxminus\boxminus) + \dots \end{aligned}$$

Spielen mit Dominos – 3

- Weiterrechnen:

$$F = \varnothing + \square \cdot F + \boxminus \cdot F \quad \Longleftrightarrow \quad F = \frac{\varnothing}{1 - \square - \boxminus}$$

- Geometrische Reihe:

$$F = \frac{\varnothing}{1 - (\square + \boxminus)} = \varnothing + \varnothing \cdot (\square + \boxminus) + \varnothing \cdot (\square + \boxminus)^2 + \dots$$
$$= \varnothing + (\square + \boxminus) + (\square\square + \square\boxminus + \boxminus\square + \boxminus\boxminus) + \dots$$

- Reduktion von Information: rechne zB $\square\square\boxminus + \square\boxminus\square + \boxminus\square\square = 3 \cdot \square^2\boxminus$

$$F = \varnothing + (\square + \boxminus) + (\square^2 + 2 \cdot \square\boxminus + \boxminus^2) + (\square^3 + 3 \cdot \square^2\boxminus + 3 \cdot \square\boxminus^2 + \boxminus^3) + \dots$$

Spielen mit Dominos – 4

- Reduziere weiter: wir wollen **nur** Anzahl der Steine wissen!
  $\rightsquigarrow$ z als “Marker”: $\not\square \triangleq z^0 = 1$, $\square \triangleq z^1$, $\boxminus \triangleq z^2$

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{1-(z+z^2)} \\
&= 1 + (z+z^2) + (z^2+2z^3+z^4) + (z^3+3z^4+3z^5+z^6) \\
&\qquad + (z^4+4z^5+6z^6+4z^7+z^8) + \dots \\
&= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + \dots
\end{aligned}
$$

Spielen mit Dominos – 4

- Reduziere weiter: wir wollen **nur** Anzahl der Steine wissen!
$\rightsquigarrow$ z als "Marker": $\cancel{\square} \triangleq z^0 = 1$, $\square \triangleq z^1$, $\boxminus \triangleq z^2$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{1-(z+z^2)} \\ &= 1 + (z+z^2) + (z^2+2z^3+z^4) + (z^3+3z^4+3z^5+z^6) \\ &\qquad + (z^4+4z^5+6z^6+4z^7+z^8) + \dots \\ &= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + \dots \end{aligned}$$

- F heißt **erzeugende Funktion**, # Überdeckungen mit n Steinen ist Koeffizient von z^n! $\rightsquigarrow$ **Fibonacci!**

Spielen mit Dominos – 4

- Reduziere weiter: wir wollen **nur** Anzahl der Steine wissen!
  $\rightsquigarrow$ z als "Marker": $\not\square \triangleq z^0 = 1$, $\square \triangleq z^1$, $\boxminus \triangleq z^2$

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{1-(z+z^2)} \\
&= 1 + (z+z^2) + (z^2+2z^3+z^4) + (z^3+3z^4+3z^5+z^6) \\
&\qquad + (z^4+4z^5+6z^6+4z^7+z^8) + \dots \\
&= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + \dots
\end{aligned}
$$

- F heißt **erzeugende Funktion**, # Überdeckungen mit n Steinen ist Koeffizient von z^n! $\rightsquigarrow$ **Fibonacci!**
- SageMath: `F = 1/(1 - z - z^2); F.series(z, 30)`

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- $\mathcal{C} \ldots$ *kombinatorische Klasse*

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- $\mathcal{C} \ldots$ *kombinatorische Klasse*
- $c_n \ldots \#$ *Objekte der Größe* n

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- $\mathcal{C} \ldots$ *kombinatorische Klasse*
- $c_n \ldots \#$ *Objekte der Größe* n

Dann heißt $C(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ *erzeugende Funktion von* $\mathcal{C}$.

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- *$\mathcal{C}\ldots$ kombinatorische Klasse*
- *$c_n\ldots$ # Objekte der Größe n*

Dann heißt $C(z) := \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ erzeugende Funktion von $\mathcal{C}$.

- $C(z)$ repräsentiert **alle** Anzahlen!

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- $\mathcal{C} \ldots$ *kombinatorische Klasse*
- $c_n \ldots \#$ *Objekte der Größe* n

Dann heißt $C(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ *erzeugende Funktion von* $\mathcal{C}$.

- $C(z)$ repräsentiert **alle** Anzahlen!
- Oft besserer Ansatz als Konzentration auf "festes" n

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- $\mathcal{C} \ldots$ *kombinatorische Klasse*
- $c_n \ldots \#$ *Objekte der Größe* n

Dann heißt $C(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ *erzeugende Funktion von* $\mathcal{C}$.

- $C(z)$ repräsentiert **alle** Anzahlen!
- Oft besserer Ansatz als Konzentration auf "festes" n
- Insbesondere hilfreich beim Auflösen von Rekursionen

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!
- Operationen auf kombinatorischen Klassen $\leftrightsquigarrow$ Operationen auf erzeugenden Funktionen

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!
- Operationen auf kombinatorischen Klassen $\leftrightsquigarrow$ Operationen auf erzeugenden Funktionen
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$... kombinatorische Klassen, $A(z)$, $B(z)$... zugeh. erzeugende Funktionen

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!
- Operationen auf kombinatorischen Klassen $\leftrightsquigarrow$ Operationen auf erzeugenden Funktionen
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$... kombinatorische Klassen, $A(z)$, $B(z)$... zugeh. erzeugende Funktionen
  - $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ hat $A(z) + B(z)$ als erzeugende Funktion

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!
- Operationen auf kombinatorischen Klassen $\leftrightsquigarrow$ Operationen auf erzeugenden Funktionen
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$... kombinatorische Klassen, $A(z)$, $B(z)$... zugeh. erzeugende Funktionen
  - $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ hat $A(z) + B(z)$ als erzeugende Funktion
  - $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ hat $A(z) \cdot B(z)$ als erzeugende Funktion

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!
- Operationen auf kombinatorischen Klassen $\leftrightsquigarrow$ Operationen auf erzeugenden Funktionen
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$... kombinatorische Klassen, $A(z)$, $B(z)$... zugeh. erzeugende Funktionen
  - $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ hat $A(z) + B(z)$ als erzeugende Funktion
  - $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ hat $A(z) \cdot B(z)$ als erzeugende Funktion
  - $\mathcal{A}^*$ hat $\frac{1}{1-A(z)}$ als erzeugende Funktion

Die symbolische Methode

- **Beispiel:** Goldbär-Worte $\mathcal{W}$ (beliebige Länge)

Die symbolische Methode

- **Beispiel:** Goldbär-Worte $\mathcal{W}$ (beliebige Länge)
  - Worte sind Folgen aus $\mathcal{G} = \{$ , ,  $\}$, also $\mathcal{W} = \mathcal{G}^*$

$$G(z) = 3z \quad \Rightarrow \quad W(z) = \frac{1}{1-3z}$$

Die symbolische Methode

- **Beispiel:** Goldbär-Worte $\mathcal{W}$ (beliebige Länge)
  - Worte sind Folgen aus $\mathcal{G} = \{$, , $\}$, also $\mathcal{W} = \mathcal{G}^*$

$$G(z) = 3z \quad \Rightarrow \quad W(z) = \frac{1}{1-3z}$$

- **Beispiel:** $2 \times n$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{F}$

Die symbolische Methode

- **Beispiel:** Goldbär-Worte $\mathcal{W}$ (beliebige Länge)
  - Worte sind Folgen aus $\mathcal{G} = \{$, , $\}$, also $\mathcal{W} = \mathcal{G}^*$

$$G(z) = 3z \quad \Rightarrow \quad W(z) = \frac{1}{1-3z}$$

- **Beispiel:** $2 \times n$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{F}$
  - Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus ▯ und ⊟

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Die symbolische Methode

- **Beispiel:** Goldbär-Worte $\mathcal{W}$ (beliebige Länge)
  - Worte sind Folgen aus $\mathcal{G} = \{$  $\}$, also $\mathcal{W} = \mathcal{G}^*$

$$G(z) = 3z \quad \Rightarrow \quad W(z) = \frac{1}{1-3z}$$

- **Beispiel:** $2 \times n$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{F}$
  - Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus ▯ und ⊟
  - Also: $\mathcal{F} = \{$▯, ⊟$\}^*$

$$\{▯, ⊟\} \rightsquigarrow z + z^2 \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1-(z+z^2)}$$

Die symbolische Methode

- **Beispiel:** Goldbär-Worte $\mathcal{W}$ (beliebige Länge)
  - Worte sind Folgen aus $\mathcal{G} = \{$, , $\}$, also $\mathcal{W} = \mathcal{G}^*$

$$G(z) = 3z \quad \Rightarrow \quad W(z) = \frac{1}{1-3z}$$

- **Beispiel:** $2 \times n$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{F}$
  - Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus ▯ und ⊟
  - Also: $\mathcal{F} = \{▯, ⊟\}^*$

$$\{▯, ⊟\} \rightsquigarrow z + z^2 \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1-(z+z^2)}$$

- **Beispiel:** Geldbeträge aus (1c), (2c), (5c) $\rightsquigarrow \mathcal{B}$

Die symbolische Methode

- **Beispiel:** Goldbär-Worte $\mathcal{W}$ (beliebige Länge)
  - Worte sind Folgen aus $\mathcal{G} = \{$, , $\}$, also $\mathcal{W} = \mathcal{G}^*$

$$G(z) = 3z \quad \Rightarrow \quad W(z) = \frac{1}{1-3z}$$

- **Beispiel:** $2 \times n$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{F}$
  - Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus ▯ und ⊟
  - Also: $\mathcal{F} = \{\text{▯}, \text{⊟}\}^*$

$$\{\text{▯}, \text{⊟}\} \rightsquigarrow z + z^2 \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1-(z+z^2)}$$

- **Beispiel:** Geldbeträge aus 1c, 2c, 5c $\rightsquigarrow \mathcal{B}$
  - Kombiniere Folge von 1c mit Folge von 2c und Folge von 5c!

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Die symbolische Methode

- **Beispiel:** Goldbär-Worte $\mathcal{W}$ (beliebige Länge)
  - Worte sind Folgen aus $\mathcal{G} = \{$, , $\}$, also $\mathcal{W} = \mathcal{G}^*$

$$G(z) = 3z \quad \Rightarrow \quad W(z) = \frac{1}{1-3z}$$

- **Beispiel:** $2 \times n$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{F}$
  - Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus $\Box$ und $\boxminus$
  - Also: $\mathcal{F} = \{\Box, \boxminus\}^*$

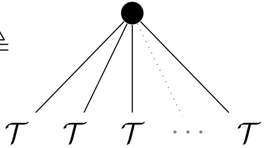
$$\{\Box, \boxminus\} \rightsquigarrow z + z^2 \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1-(z+z^2)}$$

- **Beispiel:** Geldbeträge aus 1c, 2c, 5c $\rightsquigarrow \mathcal{B}$
  - Kombiniere Folge von 1c mit Folge von 2c und Folge von 5c!
  - $\mathcal{B} = \{\text{1c}\}^* \times \{\text{2c}\}^* \times \{\text{5c}\}^*$

$$\Rightarrow B(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^5}$$

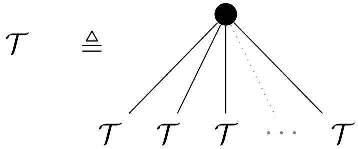
Beispiel: Geordnete, gewurzelte Bäume

$\mathcal{T} \quad \triangleq$



- Bäume sind eine Wurzel mit einer angehängten Folge von Bäumen.

Beispiel: Geordnete, gewurzelte Bäume

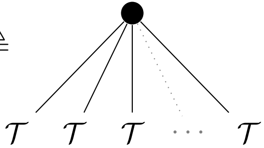


- Bäume sind eine Wurzel mit einer angehängten Folge von Bäumen.
- Kombinatorische Klasse: $\mathcal{T} = \{\bullet\} \times \mathcal{T}^*$.

$$\Rightarrow T(z) = z \cdot \frac{1}{1 - T(z)} \quad \Rightarrow \quad T(z)^2 - T(z) + z = 0$$

Beispiel: Geordnete, gewurzelte Bäume

$$\mathcal{T} \quad \triangleq$$



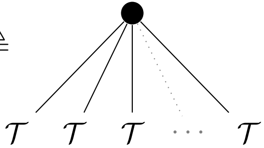
- Bäume sind eine Wurzel mit einer angehängten Folge von Bäumen.
- Kombinatorische Klasse: $\mathcal{T} = \{\bullet\} \times \mathcal{T}^*$.

$$\Rightarrow T(z) = z \cdot \frac{1}{1 - T(z)} \quad \Rightarrow \quad T(z)^2 - T(z) + z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2}$$

Beispiel: Geordnete, gewurzelte Bäume

$\mathcal{T} \quad \triangleq$



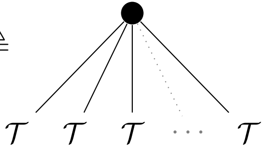
- Bäume sind eine Wurzel mit einer angehängten Folge von Bäumen.
- Kombinatorische Klasse: $\mathcal{T} = \{\bullet\} \times \mathcal{T}^*$.

$$\Rightarrow T(z) = z \cdot \frac{1}{1 - T(z)} \quad \Rightarrow \quad T(z)^2 - T(z) + z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2} \quad \rightsquigarrow T(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2}$$

Beispiel: Geordnete, gewurzelte Bäume

$\mathcal{T} \quad \triangleq$



- Bäume sind eine Wurzel mit einer angehängten Folge von Bäumen.
- Kombinatorische Klasse: $\mathcal{T} = \{\bullet\} \times \mathcal{T}^*$.

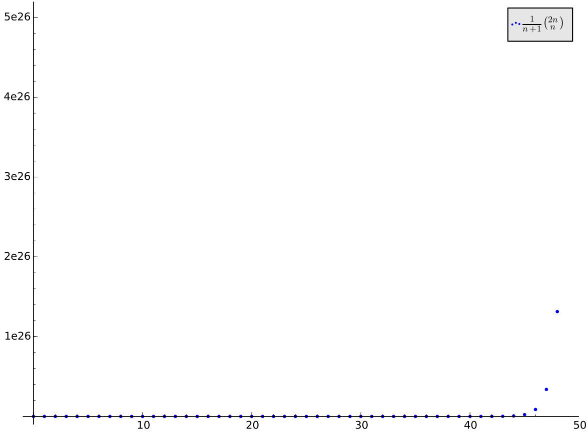
$$\Rightarrow T(z) = z \cdot \frac{1}{1 - T(z)} \quad \Rightarrow \quad T(z)^2 - T(z) + z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2} \quad \rightsquigarrow T(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2}$$

- $T(z)$ erzeugt Catalan-Zahlen C_{n-1}

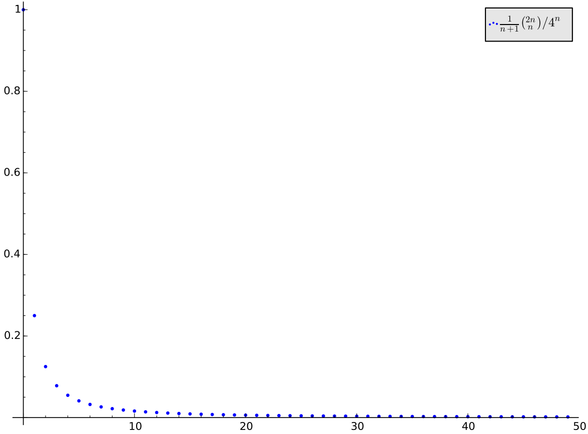
ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Asymptotische Analyse – 1

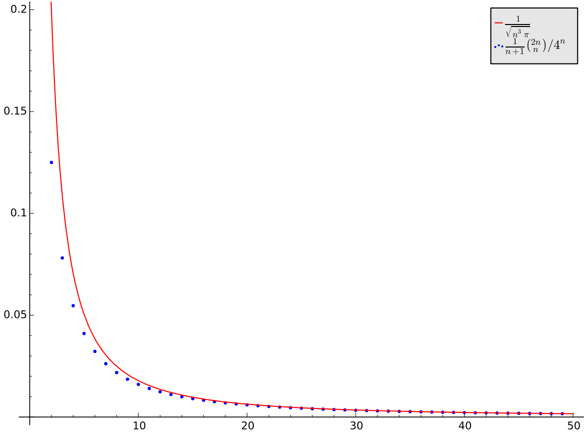


ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Asymptotische Analyse – 1



Asymptotische Analyse – 1



$$\Rightarrow C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n^3\pi}}$$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- $w_n =$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- $w_n = 3^n$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- $w_n = 3^n$
- $C_n \sim$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- $w_n = 3^n$
- $C_n \sim 4^n \frac{1}{\sqrt{n^3 \pi}}$

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- $w_n = 3^n$
- $C_n \sim 4^n \dfrac{1}{\sqrt{n^3 \pi}}$
- $f_n \sim$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- $w_n = 3^n$
- $C_n \sim 4^n \dfrac{1}{\sqrt{n^3 \pi}}$
- $f_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- $w_n = 3^n$
- $C_n \sim 4^n \dfrac{1}{\sqrt{n^3 \pi}}$
- $f_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$

- Informationen aus erzeugenden Funktionen gewinnbar!
  - Goldbärworte: $W(z) = \frac{1}{1-3z}$, $z = 1/3 \rightsquigarrow 3^n$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- $w_n = 3^n$
- $C_n \sim 4^n \frac{1}{\sqrt{n^3 \pi}}$
- $f_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$

- Informationen aus erzeugenden Funktionen gewinnbar!
  - Goldbärworte: $W(z) = \frac{1}{1-3z}$, $z = 1/3 \rightsquigarrow 3^n$
  - Catalan: $C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$, $z = 1/4 \rightsquigarrow 4^n$

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- $w_n = 3^n$
- $C_n \sim 4^n \dfrac{1}{\sqrt{n^3\pi}}$
- $f_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$

- Informationen aus erzeugenden Funktionen gewinnbar!
  - Goldbärworte: $W(z) = \frac{1}{1-3z}$, $z = 1/3 \rightsquigarrow 3^n$
  - Catalan: $C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$, $z = 1/4 \rightsquigarrow 4^n$
  - Fibonacci: $F(z) = \frac{1}{1-(z+z^2)}$, $z = 2/(1+\sqrt{5}) \rightsquigarrow (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$

Mathematik @ AAU

Bachelorstudium Technische Mathematik

Vertiefung Angewandte Analysis	Vertiefung Angewandte Statistik	Vertiefung Diskrete Mathematik
	BSc	

3 J

Masterstudium Technische Mathematik

Vertiefung A. Analysis	Vertiefung A. Statistik	Vertiefung Diskr. Math.
	Dipl.-Ing.	

5 J

Dr.-Studium Technische Mathematik

Dr. techn.

8 J

Wissenschaft

Finanz- und Versicherung
Industrie
Wirtschaft
...

Bachelorstudium Unterrichtsfach Mathematik + ??

BEd

4 J

Schule

x J

Masterst. UF Math. + ??

MEd

$(x+2)$ J

Für Schülerinnen und Schüler

- Tag der offenen Tür @ AAU
- Schulvorträge / Klassenbesuche @ AAU
- VWA aus Mathematik? $\rightsquigarrow$ **Dr. Hans Riegel-Fachpreis**
- Vorbereitungskurse: Mathematik-Olympiade
- Ferialpraktikum
- „Studieren Probieren" / „SchülerInnen an die Hochschulen"

`https://www.aau.at/mathematik/angebot-schueler/`

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ
FAKULTÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN