

Die Symbolische Methode

Oder: Wie Funktionen beim Zählen helfen können

Benjamin Hackl



DR. HANS RIEGEL-STIFTUNG

Mathematik-Seminar — 25. September 2016



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.



Der Wissenschaftsfonds.

2009 – Talentecamp



Fehlerkorrigierende Codes

- Erkennung + Korrektur von Daten nach Übertragung
- Workshopwoche im September 2009



Ein Beispiel: Nachricht $m = 1011$. Mit *parity bit*: $c = 10111$.

Empfangene Nachricht: $\tilde{c} = 101\textcolor{red}{0}1$, Fehler wird erkannt.

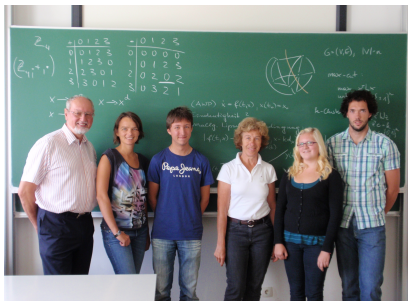
2010 – Studienbeginn und Feriapraktika

- März 2010: *außerordentlicher* Student an der AAU



2010 – Studienbeginn und Ferialpraktika

- ▶ März 2010: *außerordentlicher* Student an der AAU
- ▶ Juli 2010 / 2011 / 2012: Ferialpraktikum am Institut für Mathematik



2012 – "ordentlicher" Studienbeginn

- ▶ Juni 2012: Schulabschluss

2012 – "ordentlicher" Studienbeginn

- ▶ Juni 2012: Schulabschluss
- ▶ Oktober 2012: ordentlicher Student ("Technische Mathematik") an der AAU

2012 – “ordentlicher” Studienbeginn

- ▶ Juni 2012: Schulabschluss
- ▶ Oktober 2012: ordentlicher Student (“Technische Mathematik”) an der AAU
- ▶ Außerdem: Beginn als Projektassistent im Projekt **CODES**

CODES

Algorithmic extraction and error correction codes for lightweight security anchors with reconfigurable PUFs

In the CODES project novel lightweight cryptographic algorithms and protocols are developed, which will lead to increased security and guarantee that a system is a genuine, non-modified one including its hardware components. The project has reached half-time in September 2013 and the first revealing results are available which are essential for development and implementation of algorithms in the ongoing project progression. The project consortium is led and coordinated by the Austrian company Technikon and supported by the Alpen-Adria Universität Klagenfurt as well as the University of Applied Sciences Upper Austria, Campus Hagenberg.

Projekt **CODES**

- ▶ **AAU**, FH Hagenberg, Fa. Technikon

Projekt **CODES**

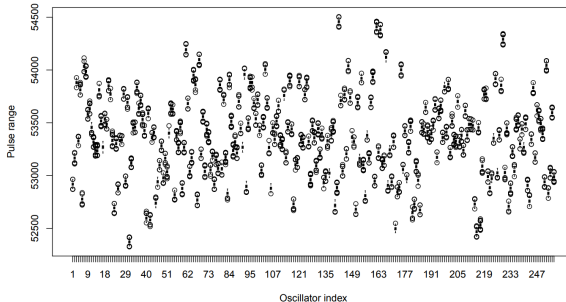
- ▶ **AAU**, FH Hagenberg, Fa. Technikon
- ▶ Auswahl, Studium und Implementation geeigneter fehlerkorrigierender Codes:

Projekt **CODES**

- ▶ **AAU**, FH Hagenberg, Fa. Technikon
- ▶ Auswahl, Studium und Implementation geeigneter fehlerkorrigierender Codes:
 - ▶ PUFs ("Physically Unclonable Functions"): Challenge $\rightsquigarrow$ Response

Projekt **CODES**

- ▶ **AAU**, FH Hagenberg, Fa. Technikon
- ▶ Auswahl, Studium und Implementation geeigneter fehlerkorrigierender Codes:
 - ▶ PUFs ("Physically Unclonable Functions"): Challenge $\rightsquigarrow$ Response
 - ▶ Weil Hardware: Response fehlerbehaftet!

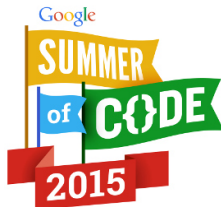


2014 bis jetzt

- ▶ Juni 2014: Abschluss Bachelorstudium
 - ▶ Bachelorarbeit: **Concatenated Error Correcting Codes: Galois and Binary Concatenation**

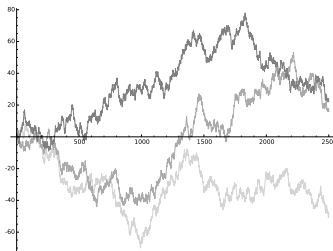
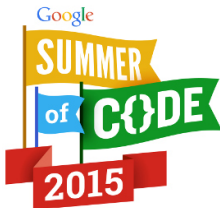
2014 bis jetzt

- ▶ Juni 2014: Abschluss Bachelorstudium
 - ▶ Bachelorarbeit: **Concatenated Error Correcting Codes: Galois and Binary Concatenation**
- ▶ Mai 2015: *Google Summer of Code* – (Multivariate) Asymptotic Expressions in SageMath



2014 bis jetzt

- ▶ Juni 2014: Abschluss Bachelorstudium
 - ▶ Bachelorarbeit: **Concatenated Error Correcting Codes: Galois and Binary Concatenation**
- ▶ Mai 2015: *Google Summer of Code* – (Multivariate) Asymptotic Expressions in SageMath
- ▶ August 2015: Abschluss Masterstudium
 - ▶ Masterarbeit: **Asymptotic Analysis of Lattice Paths and Related Structures**

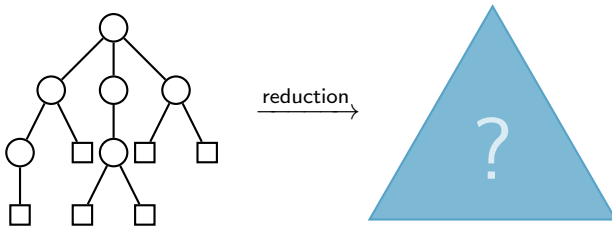


Status quo

- Doktorand im Bereich **Technische Mathematik**, betreut von Prof. Clemens Heuberger

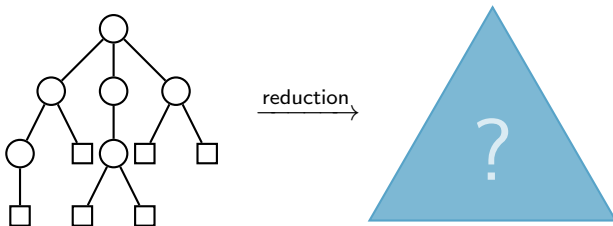
Status quo

- ▶ Doktorand im Bereich **Technische Mathematik**, betreut von Prof. Clemens Heuberger
- ▶ Dissertationsprojekt: **Asymptotic Analysis of recursively generated Structures**



Status quo

- ▶ Doktorand im Bereich **Technische Mathematik**, betreut von Prof. Clemens Heuberger
- ▶ Dissertationsprojekt: **Asymptotic Analysis of recursively generated Structures**
- ▶ Projektassistent im FWF-Projekt P24644-N26 **Asymptotic Analysis of Extremal Discrete Structures**

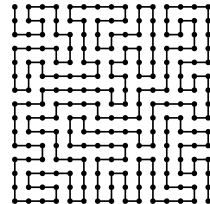


Um was geht es überhaupt? Und warum?

- **Kombinatorik:** "Lehre vom Abzählen"

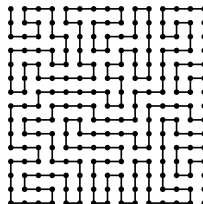
Um was geht es überhaupt? Und warum?

- ▶ **Kombinatorik:** "Lehre vom Abzählen"
- ▶ Untersuchen von (diskreten) Strukturen:
 - ▶ Aufbau
 - ▶ Wachstum
 - ▶ Teilstrukturen

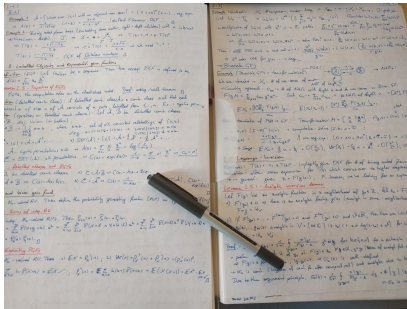


Um was geht es überhaupt? Und warum?

- ▶ **Kombinatorik:** "Lehre vom Abzählen"
- ▶ Untersuchen von (diskreten) Strukturen:
 - ▶ Aufbau
 - ▶ Wachstum
 - ▶ Teilstrukturen
- ▶ **Anwendungsbereiche:** *Informatik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Algebra, Mengenlehre, ...*



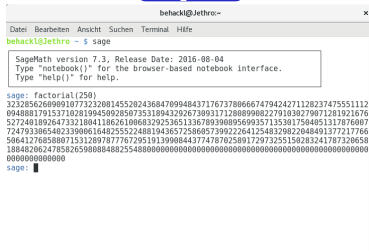
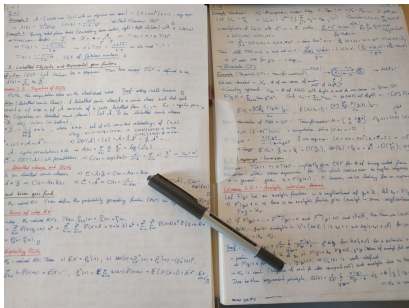
Methodik



Stift + Papier



Methodik



Stift + Papier



Open-Source
Mathematiksoftware
SageMath

Zum Mitmachen/-denken

- Teile des Vortrags: **interaktiv mitrechenbar!**

Zum Mitmachen/-denken

- ▶ Teile des Vortrags: **interaktiv mitrechenbar!**
- ▶ SageMath: quelloffenes Computeralgebrasystem, online nutzbar unter

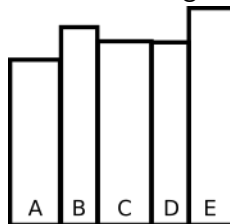
<https://cloud.sagemath.com>

Zum Mitmachen/-denken

- ▶ Teile des Vortrags: **interaktiv mitrechenbar!**
- ▶ SageMath: quelloffenes Computeralgebrasystem, online nutzbar unter
<https://cloud.sagemath.com>
- ▶ Im Vortrag: vieles mit Hand rechenbar – aber nicht alles! Falls Internet: selbst mit SageMath, sonst: mit mir gemeinsam

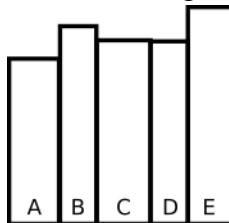
Permutationen

Q: Fünf verschiedene Bücher stehen der Reihe nach in einem Regal. Wie viele mögliche Anordnungen der Bücher gibt es?



Permutationen

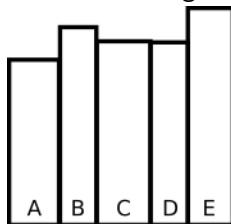
Q: Fünf verschiedene Bücher stehen der Reihe nach in einem Regal. Wie viele mögliche Anordnungen der Bücher gibt es?



A: 5 Plätze für erstes Buch, 4 für zweites, ...

Permutationen

Q: Fünf verschiedene Bücher stehen der Reihe nach in einem Regal. Wie viele mögliche Anordnungen der Bücher gibt es?

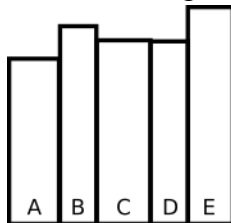


A: 5 Plätze für erstes Buch, 4 für zweites, ...

$$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Permutationen

Q: Fünf verschiedene Bücher stehen der Reihe nach in einem Regal. Wie viele mögliche Anordnungen der Bücher gibt es?

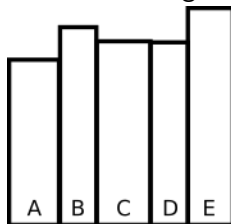


A: **5** Plätze für erstes Buch, **4** für zweites, ...

$$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 = \mathbf{5!}$$

Permutationen

Q: Fünf verschiedene Bücher stehen der Reihe nach in einem Regal. Wie viele mögliche Anordnungen der Bücher gibt es?



A: **5** Plätze für erstes Buch, **4** für zweites, ...

$$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 = \mathbf{5!}$$

► n **verschiedene** Objekte $\rightsquigarrow n \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ *Permutationen*

Auswahl(en)

Q: Eine Münze wird sieben Mal geworfen. Wie viele verschiedene Wurfreihenfolgen mit genau drei mal Zahl gibt es?



Auswahl(en)

Q: Eine Münze wird sieben Mal geworfen. Wie viele verschiedene Wurfreihenfolgen mit genau drei mal Zahl gibt es?

A: Wähle drei der sieben möglichen Positionen:

$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}$. **Vorsicht:** das berücksichtigt die Reihenfolge!



Auswahl(en)

Q: Eine Münze wird sieben Mal geworfen. Wie viele verschiedene Wurfreihenfolgen mit genau drei mal Zahl gibt es?

A: Wähle drei der sieben möglichen Positionen:
 $7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}$. **Vorsicht:** das berücksichtigt die Reihenfolge!
 Beobachtung: jede Lösung hat $3!$ Varianten, die alle gezählt werden.



Auswahl(en)

Q: Eine Münze wird sieben Mal geworfen. Wie viele verschiedene Wurfreihenfolgen mit genau drei mal Zahl gibt es?

A: Wähle drei der sieben möglichen Positionen:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}. \text{ **Vorsicht:}** \text{ das berücksichtigt die Reihenfolge!}$$

Beobachtung: jede Lösung hat 3! Varianten, die alle gezählt werden. $\Rightarrow \frac{7!}{4!3!} = 35 = \binom{7}{3}$



Auswahl(en)

Q: Eine Münze wird sieben Mal geworfen. Wie viele verschiedene Wurfreihenfolgen mit genau drei mal Zahl gibt es?

A: Wähle drei der sieben möglichen Positionen:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}. \text{ **Vorsicht:}** \text{ das berücksichtigt die Reihenfolge!}$$

Beobachtung: jede Lösung hat 3! Varianten, die alle gezählt werden. $\Rightarrow \frac{7!}{4!3!} = 35 = \binom{7}{3}$

- n verschiedene Objekte, k auswählen:



Auswahl(en)

Q: Eine Münze wird sieben Mal geworfen. Wie viele verschiedene Wurfreihenfolgen mit genau drei mal Zahl gibt es?

A: Wähle drei der sieben möglichen Positionen:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}.$$

Vorsicht: das berücksichtigt die Reihenfolge!
Beobachtung: jede Lösung hat 3! Varianten, die alle gezählt werden. $\Rightarrow \frac{7!}{4!3!} = 35 = \binom{7}{3}$

► n verschiedene Objekte, k auswählen:

► $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten (ohne Reihenfolge)



Auswahl(en)

Q: Eine Münze wird sieben Mal geworfen. Wie viele verschiedene Wurfreihenfolgen mit genau drei mal Zahl gibt es?

A: Wähle drei der sieben möglichen Positionen:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}. \text{ **Vorsicht:}** \text{ das berücksichtigt die Reihenfolge!}$$

Beobachtung: jede Lösung hat $3!$ Varianten, die alle gezählt werden. $\Rightarrow \frac{7!}{4!3!} = 35 = \binom{7}{3}$

► n verschiedene Objekte, k auswählen:

- $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten (ohne Reihenfolge)
- $\frac{n!}{(n-k)!} = n^k$ Möglichkeiten (mit Reihenfolge)

Nicht unterscheidbare Objekte

Q: Ein Gärtner pflanzt 12 Blumen in einer Reihe. Er hat 5 lila, 4 rote und 3 blaue Blumen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er sie zu pflanzen?



Nicht unterscheidbare Objekte

Q: Ein Gärtner pflanzt 12 Blumen in einer Reihe. Er hat 5 lila, 4 rote und 3 blaue Blumen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er sie zu pflanzen?



A: Wenn alle Blumen unterscheidbar: 12! Anordnungen.

Nicht unterscheidbare Objekte

Q: Ein Gärtner pflanzt 12 Blumen in einer Reihe. Er hat 5 lila, 4 rote und 3 blaue Blumen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er sie zu pflanzen?



A: Wenn alle Blumen unterscheidbar: $12!$ Anordnungen.
Gleichfarbige Blumen untereinander tauschen: $5! \cdot 4! \cdot 3!$ mögliche Anordnungen.

Nicht unterscheidbare Objekte

Q: Ein Gärtner pflanzt 12 Blumen in einer Reihe. Er hat 5 lila, 4 rote und 3 blaue Blumen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er sie zu pflanzen?



A: Wenn alle Blumen unterscheidbar: 12! Anordnungen.
Gleichfarbige Blumen untereinander tauschen: $5! \cdot 4! \cdot 3!$
mögliche Anordnungen. $\Rightarrow \frac{12!}{5!4!3!} = \binom{12}{5;4;3}$

Nicht unterscheidbare Objekte

Q: Ein Gärtner pflanzt 12 Blumen in einer Reihe. Er hat 5 lila, 4 rote und 3 blaue Blumen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er sie zu pflanzen?



A: Wenn alle Blumen unterscheidbar: $12!$ Anordnungen.
Gleichfarbige Blumen untereinander tauschen: $5! \cdot 4! \cdot 3!$
mögliche Anordnungen. $\Rightarrow \frac{12!}{5!4!3!} = \binom{12}{5;4;3}$

- $n = c_1 + c_2 + \dots + c_k$ Objekte, jeweils c_j gleiche Objekte vom Typ $j \rightsquigarrow \frac{n!}{c_1! c_2! \dots c_k!}$ Anordnungen.

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)



Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)



A: Position der ersten Person: $\emptyset$ 1 Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person, $\dots \Rightarrow 5!$,

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)



A: Position der ersten Person: $\emptyset$ 1 Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person, ... $\Rightarrow 5!$, aber: Reihenfolge der Sitznachbarn darf sich ändern (Spiegelung!)

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)



A: Position der ersten Person: $\emptyset$ 1 Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person, ... $\Rightarrow 5!$, aber: Reihenfolge der Sitznachbarn darf sich ändern (Spiegelung!) $\Rightarrow 5!/2 = 60$ Sitzordnungen.

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)



A: Position der ersten Person: $\emptyset$ 1 Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person, ... $\Rightarrow 5!$, aber: Reihenfolge der Sitznachbarn darf sich ändern (Spiegelung!) $\Rightarrow 5!/2 = 60$ Sitzordnungen.

► Zirkuläre Anordnung von n Personen am Kreis:

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)



A: Position der ersten Person: $\emptyset$ 1 Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person, ... $\Rightarrow 5!$, aber: Reihenfolge der Sitznachbarn darf sich ändern (Spiegelung!) $\Rightarrow 5!/2 = 60$ Sitzordnungen.

- Zirkuläre Anordnung von n Personen am Kreis:
 - $(n - 1)!$ bei fester Reihenfolge,

Andere Anordnungen

Q: Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Sitzordnungen sind gleich, wenn jeder die gleichen Nachbarn hat.)



A: Position der ersten Person: $\emptyset$ 1 Möglichkeit, fünf Plätze für zweite Person, $\dots \Rightarrow 5!$, aber: Reihenfolge der Sitznachbarn darf sich ändern (Spiegelung!) $\Rightarrow 5!/2 = 60$ Sitzordnungen.

► Zirkuläre Anordnung von n Personen am Kreis:

- $(n - 1)!$ bei fester Reihenfolge,
- $(n - 1)!/2$ bei gleichen Nachbarn.

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- ▶ $\mathcal{C} \dots$ (abzählbare) Menge

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- ▶ $\mathcal{C} \dots$ (abzählbare) Menge
- ▶ $|\cdot|: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ein “Größemesser” der Elemente in $\mathcal{C}$

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- ▶ $\mathcal{C} \dots$ (abzählbare) Menge
- ▶ $|\cdot|: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ein “Größemesser” der Elemente in $\mathcal{C}$
- ▶ $|\{\gamma \in \mathcal{C}: |\gamma| = n\}| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- ▶ $\mathcal{C} \dots$ (abzählbare) Menge
- ▶ $|\cdot|: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ein “Größemesser” der Elemente in $\mathcal{C}$
- ▶ $|\{\gamma \in \mathcal{C}: |\gamma| = n\}| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Dann heißt $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ eine **kombinatorische Klasse**.

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- ▶ $\mathcal{C}$... (abzählbare) Menge
- ▶ $|\cdot|: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ein "Größemesser" der Elemente in $\mathcal{C}$
- ▶ $|\{\gamma \in \mathcal{C}: |\gamma| = n\}| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Dann heißt $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ eine **kombinatorische Klasse**.

- ▶ Konkret: Elemente in $\mathcal{C}$ haben eine Größe, und es gibt nur endlich viele Elemente einer gegebenen Größe

Was sind kombinatorische Klassen?

Definition (Kombinatorische Klasse)

- ▶ $\mathcal{C} \dots$ (abzählbare) Menge
- ▶ $|\cdot|: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ein “Größemesser” der Elemente in $\mathcal{C}$
- ▶ $|\{\gamma \in \mathcal{C}: |\gamma| = n\}| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Dann heißt $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ eine **kombinatorische Klasse**.

- ▶ Konkret: Elemente in $\mathcal{C}$ haben eine Größe, und es gibt nur endlich viele Elemente einer gegebenen Größe
- ▶ Konvention:

kombinatorische Klasse $\mathcal{C} \rightsquigarrow c_n \dots \#$ Elemente der Größe n

Beispiel: Gitterpfade – 1

Definition (Gitterpfade)

- $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^d$... Menge von Schritten

Beispiel: Gitterpfade – 1

Definition (Gitterpfade)

- ▶ $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^d$... Menge von Schritten
- ▶ Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $s_{n+1} - s_n \in \mathcal{S}$ für alle $n \geq 0$

Beispiel: Gitterpfade – 1

Definition (Gitterpfade)

- ▶ $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^d$... Menge von Schritten
- ▶ Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $s_{n+1} - s_n \in \mathcal{S}$ für alle $n \geq 0$

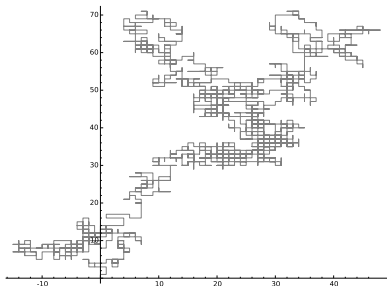
Dann heißt $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein d -dimensionaler Gitterpfad.

Beispiel: Gitterpfade – 1

Definition (Gitterpfade)

- ▶ $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^d$... Menge von Schritten
- ▶ Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $s_{n+1} - s_n \in \mathcal{S}$ für alle $n \geq 0$

Dann heißt $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein d -dimensionaler Gitterpfad.



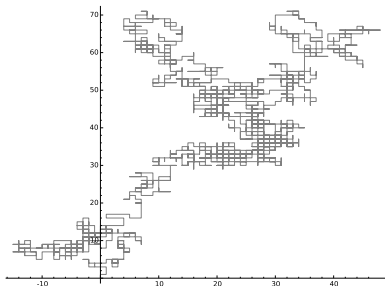
$$\mathcal{S} = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$$

Beispiel: Gitterpfade – 1

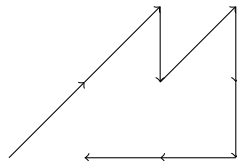
Definition (Gitterpfade)

- ▶ $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^d$... Menge von Schritten
- ▶ Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $s_{n+1} - s_n \in \mathcal{S}$ für alle $n \geq 0$

Dann heißt $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein d -dimensionaler Gitterpfad.



$$\mathcal{S} = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$$

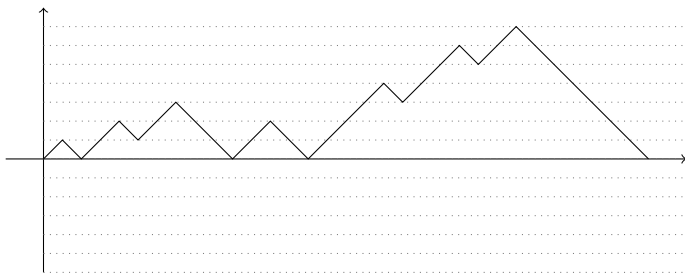


$$\mathcal{S} = \{(1, 1), (0, -1), (-1, 0)\}$$

Beispiel: Gitterpfade – 2

► Dyck-Pfade $\mathcal{D}$:

- Schrittmenge $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, -1)\}$, Start in $(0, 0)$
- Nie unter der x -Achse, Ende auf der Achse

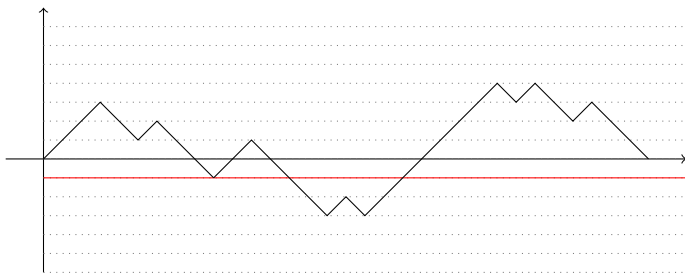


Strategie: $\# \nearrow = \# \searrow$; ziehe “schlechte Pfade” ab!

Beispiel: Gitterpfade – 2

► Dyck-Pfade $\mathcal{D}$:

- Schrittmenge $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, -1)\}$, Start in $(0, 0)$
- Nie unter der x -Achse, Ende auf der Achse

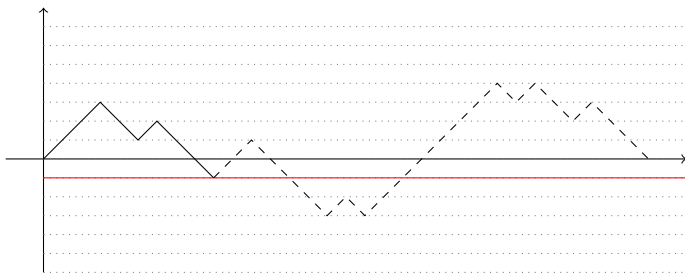


Strategie: $\# \nearrow = \# \searrow$; ziehe “schlechte Pfade” ab!

Beispiel: Gitterpfade – 2

► Dyck-Pfade $\mathcal{D}$:

- Schrittmenge $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, -1)\}$, Start in $(0, 0)$
- Nie unter der x -Achse, Ende auf der Achse

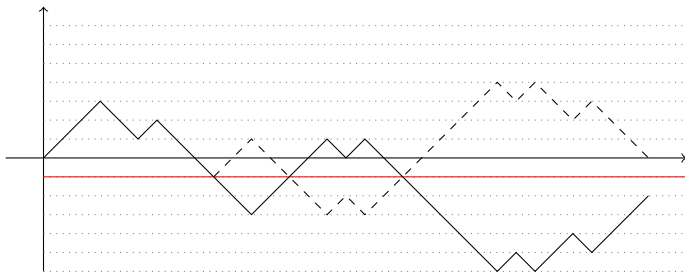


Strategie: $\# \nearrow = \# \searrow$; ziehe “schlechte Pfade” ab!

Beispiel: Gitterpfade – 2

► Dyck-Pfade $\mathcal{D}$:

- Schrittmenge $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, -1)\}$, Start in $(0, 0)$
- Nie unter der x -Achse, Ende auf der Achse

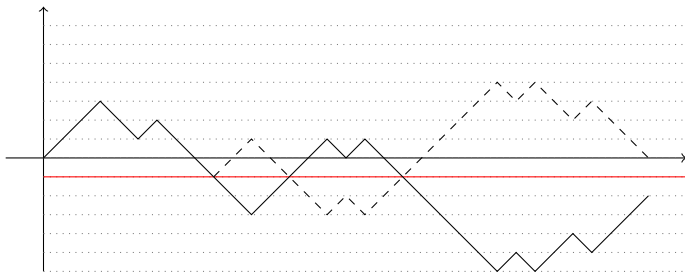


Strategie: $\# \nearrow = \# \searrow$; ziehe “schlechte Pfade” ab!

Beispiel: Gitterpfade – 2

► Dyck-Pfade $\mathcal{D}$:

- Schrittmenge $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, -1)\}$, Start in $(0, 0)$
- Nie unter der x -Achse, Ende auf der Achse



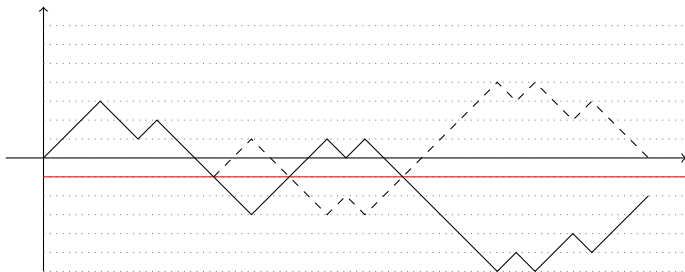
Strategie: $\# \nearrow = \# \searrow$; ziehe “schlechte Pfade” ab!

$$\Rightarrow \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = d_n$$

Beispiel: Gitterpfade – 2

► Dyck-Pfade $\mathcal{D}$:

- Schrittmenge $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, -1)\}$, Start in $(0, 0)$
- Nie unter der x -Achse, Ende auf der Achse



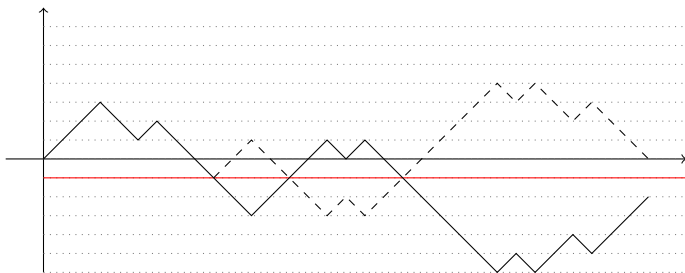
Strategie: $\# \nearrow = \# \searrow$; ziehe “schlechte Pfade” ab!

$$\Rightarrow \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \mathbf{C_n} \dots \text{Catalan-Zahlen}$$

Beispiel: Gitterpfade – 2

► Dyck-Pfade $\mathcal{D}$:

- Schrittmenge $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, -1)\}$, Start in $(0, 0)$
- Nie unter der x -Achse, Ende auf der Achse



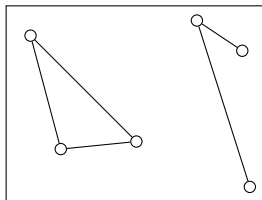
Strategie: $\# \nearrow = \# \searrow$; ziehe “schlechte Pfade” ab!

$$\Rightarrow \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \mathbf{C_n} \dots \text{Catalan-Zahlen}$$

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ...

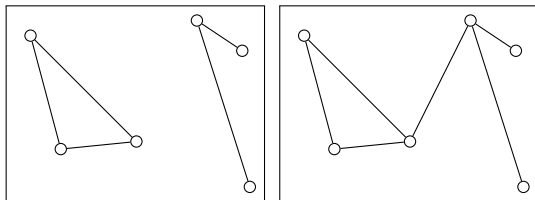
Beispiel: Bäume – 1

- **Graph:** $V \dots$ Knotenmenge, $E \dots$ Kantenmenge
 $\Rightarrow G = (V, E) \dots$ Graph



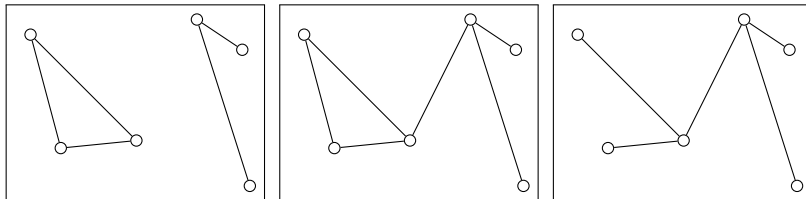
Beispiel: Bäume – 1

- ▶ **Graph:** $V \dots$ Knotenmenge, $E \dots$ Kantenmenge
 $\Rightarrow G = (V, E) \dots$ Graph
- ▶ **Zusammenhängender Graph:** jeder Knoten erreichbar



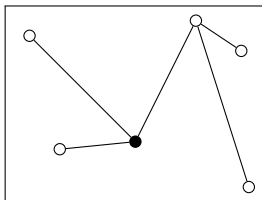
Beispiel: Bäume – 1

- ▶ **Graph:** $V \dots$ Knotenmenge, $E \dots$ Kantenmenge
 $\Rightarrow G = (V, E) \dots$ Graph
- ▶ **Zusammenhängender Graph:** jeder Knoten erreichbar
- ▶ **Baum:** Zusammenhängender Graph ohne Kreise



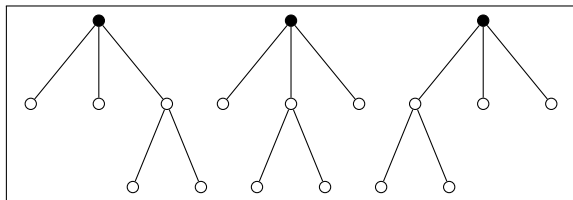
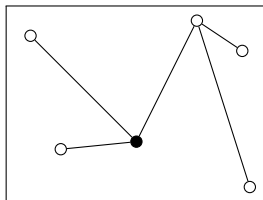
Beispiel: Bäume – 2

- **Gewurzelter Baum:** Baum mit einem Spezialknoten (Wurzel)



Beispiel: Bäume – 2

- **Gewurzelter Baum:** Baum mit einem Spezialknoten (Wurzel)
- **Geordneter Wurzelbaum:** Gewurzelter Baum mit geordneten Kindern



Beispiel: Bäume – 3

- $\mathcal{G}$... Klasse der geordneten Wurzelbäume. Bäume mit n Knoten...

Beispiel: Bäume – 3

- $\mathcal{G}$... Klasse der geordneten Wurzelbäume. Bäume mit n Knoten...

► $g_1 = g_2 = 1, g_3 = 2 \rightsquigarrow$ 

Beispiel: Bäume – 3

- $\mathcal{G}$... Klasse der geordneten Wurzelbäume. Bäume mit n Knoten...

- $g_1 = g_2 = 1, g_3 = 2 \rightsquigarrow$ 
- $g_4 = 5 \rightsquigarrow$ 

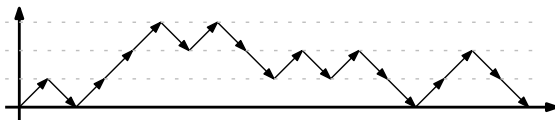
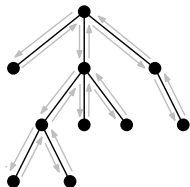
Beispiel: Bäume – 3

- $\mathcal{G}$... Klasse der geordneten Wurzelbäume. Bäume mit n Knoten...

- $g_1 = g_2 = 1, g_3 = 2 \rightsquigarrow$

- $g_4 = 5 \rightsquigarrow$

- Allgemein? $\rightsquigarrow$ Handschuhbijektion!



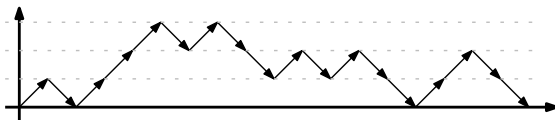
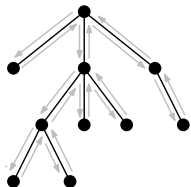
Beispiel: Bäume – 3

- $\mathcal{G}$... Klasse der geordneten Wurzelbäume. Bäume mit n Knoten...

- $g_1 = g_2 = 1, g_3 = 2 \rightsquigarrow$

- $g_4 = 5 \rightsquigarrow$

- Allgemein? $\rightsquigarrow$ Handschuhbijektion!



- Damit: Geordneter Wurzelbaum mit n Knoten $\simeq$ Dyck-Pfad mit $2n - 2$ Schritten $\Rightarrow g_n = C_{n-1}$

Beispiel: Wörter – 1

- Alphabet: Σ . . . Menge von “Symbolen”, zB $\Sigma = \{a, b\}$

Beispiel: Wörter – 1

- ▶ Alphabet: Σ . . . Menge von “Symbolen”, zB $\Sigma = \{a, b\}$
- ▶ Wörter: (endliche) Folgen von Symbolen, zB *aaaaabbababa*

Beispiel: Wörter – 1

- ▶ Alphabet: Σ . . . Menge von “Symbolen”, zB $\Sigma = \{a, b\}$
- ▶ Wörter: (endliche) Folgen von Symbolen, zB *aaaaabbababa*
- ▶ Sprache: Menge von Wörtern

Beispiel: Wörter – 1

- ▶ Alphabet: Σ . . . Menge von “Symbolen”, zB $\Sigma = \{a, b\}$
- ▶ Wörter: (endliche) Folgen von Symbolen, zB *aaaaabbababa*
- ▶ Sprache: Menge von Wörtern
- ▶ Hintereinanderhängen: $L_1 \cdot L_2 = \{\ell_1 \ell_2 : \ell_1 \in L_1, \ell_2 \in L_2\}$

Beispiel: Wörter – 1

- ▶ Alphabet: Σ . . . Menge von “Symbolen”, zB $\Sigma = \{a, b\}$
- ▶ Wörter: (endliche) Folgen von Symbolen, zB *aaaaabbababa*
- ▶ Sprache: Menge von Wörtern
- ▶ Hintereinanderhängen: $L_1 \cdot L_2 = \{\ell_1 \ell_2 : \ell_1 \in L_1, \ell_2 \in L_2\}$
- ▶ Insbesondere: Σ^k . . . Wörter der Länge k über Σ

Beispiel: Wörter – 1

- ▶ Alphabet: Σ ... Menge von "Symbolen", zB $\Sigma = \{a, b\}$
- ▶ Wörter: (endliche) Folgen von Symbolen, zB *aaaaabbababa*
- ▶ Sprache: Menge von Wörtern
- ▶ Hintereinanderhängen: $L_1 \cdot L_2 = \{\ell_1 \ell_2 : \ell_1 \in L_1, \ell_2 \in L_2\}$
- ▶ Insbesondere: Σ^k ... Wörter der Länge k über Σ
- ▶ Kleene-Hülle: $\Sigma^* = \underbrace{\Sigma^0}_{\{\varepsilon\}} + \Sigma + \Sigma^2 + \Sigma^3 + \dots$

Beispiel: Wörter – 1

- ▶ Alphabet: Σ . . . Menge von “Symbolen”, zB $\Sigma = \{a, b\}$
- ▶ Wörter: (endliche) Folgen von Symbolen, zB *aaaaabbababa*
- ▶ Sprache: Menge von Wörtern
- ▶ Hintereinanderhängen: $L_1 \cdot L_2 = \{\ell_1 \ell_2 : \ell_1 \in L_1, \ell_2 \in L_2\}$
- ▶ Insbesondere: Σ^k . . . Wörter der Länge k über Σ
- ▶ Kleene-Hülle: $\Sigma^* = \underbrace{\Sigma^0}_{\{\varepsilon\}} + \Sigma + \Sigma^2 + \Sigma^3 + \dots$

Q: $\Sigma = \{0, 1\}$. $\sigma_n = ?$

Beispiel: Wörter – 1

- ▶ Alphabet: Σ . . . Menge von “Symbolen”, zB $\Sigma = \{a, b\}$
- ▶ Wörter: (endliche) Folgen von Symbolen, zB *aaaaabbababa*
- ▶ Sprache: Menge von Wörtern
- ▶ Hintereinanderhängen: $L_1 \cdot L_2 = \{\ell_1 \ell_2 : \ell_1 \in L_1, \ell_2 \in L_2\}$
- ▶ Insbesondere: Σ^k . . . Wörter der Länge k über Σ
- ▶ Kleene-Hülle: $\Sigma^* = \underbrace{\Sigma^0}_{\{\varepsilon\}} + \Sigma + \Sigma^2 + \Sigma^3 + \dots$

Q: $\Sigma = \{0, 1\}$. $\sigma_n = ?$

A: $\sigma_n = 2^n$

Beispiel: Wörter – 2

- Sprachen können auch komplizierter sein:

Beispiel: Wörter – 2

- ▶ Sprachen können auch komplizierter sein:
 - ▶ $\{0, \dots, 9\}^* \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Beispiel: Wörter – 2

- ▶ Sprachen können auch komplizierter sein:
 - ▶ $\{0, \dots, 9\}^* \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 - ▶ $\{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_a = |\sigma|_b\}$

Beispiel: Wörter – 2

- ▶ Sprachen können auch komplizierter sein:
 - ▶ $\{0, \dots, 9\}^* \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 - ▶ $\{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_a = |\sigma|_b\}$
 - ▶ $\{p \in \{\odot\}^* : p \text{ ist unär codierte Primzahl}\}$

Beispiel: Wörter – 2

- ▶ Sprachen können auch komplizierter sein:
 - ▶ $\{0, \dots, 9\}^* \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 - ▶ $\{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_a = |\sigma|_b\}$
 - ▶ $\{p \in \{\odot\}^* : p \text{ ist unär codierte Primzahl}\}$
- ▶ Bei solchen allgemeinen Sprachen: Zählen oft sehr schwierig.

Beispiel: Wörter – 2

- ▶ Sprachen können auch komplizierter sein:
 - ▶ $\{0, \dots, 9\}^* \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 - ▶ $\{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_a = |\sigma|_b\}$
 - ▶ $\{p \in \{\odot\}^* : p \text{ ist unär codierte Primzahl}\}$
- ▶ Bei solchen allgemeinen Sprachen: Zählen oft sehr schwierig.

Q: $\mathcal{A} = \{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_{aab} \geq 1\}$

Beispiel: Wörter – 2

- ▶ Sprachen können auch komplizierter sein:
 - ▶ $\{0, \dots, 9\}^* \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 - ▶ $\{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_a = |\sigma|_b\}$
 - ▶ $\{p \in \{\star\}^* : p \text{ ist unär codierte Primzahl}\}$
- ▶ Bei solchen allgemeinen Sprachen: Zählen oft sehr schwierig.

Q: $\mathcal{A} = \{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_{aab} \geq 1\}$

- ▶ $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

Beispiel: Wörter – 2

- ▶ Sprachen können auch komplizierter sein:
 - ▶ $\{0, \dots, 9\}^* \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 - ▶ $\{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_a = |\sigma|_b\}$
 - ▶ $\{p \in \{\star\}^* : p \text{ ist unär codierte Primzahl}\}$
- ▶ Bei solchen allgemeinen Sprachen: Zählen oft sehr schwierig.

Q: $\mathcal{A} = \{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_{aab} \geq 1\}$

- ▶ $a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- ▶ $a_3 = 1$: aab

Beispiel: Wörter – 2

- ▶ Sprachen können auch komplizierter sein:
 - ▶ $\{0, \dots, 9\}^* \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 - ▶ $\{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_a = |\sigma|_b\}$
 - ▶ $\{p \in \{\star\}^* : p \text{ ist unär codierte Primzahl}\}$
- ▶ Bei solchen allgemeinen Sprachen: Zählen oft sehr schwierig.

Q: $\mathcal{A} = \{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_{aab} \geq 1\}$

- ▶ $a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- ▶ $a_3 = 1$: aab
- ▶ $a_4 = 4$: $aaba, aabb, baab, aaab$

Beispiel: Wörter – 2

- ▶ Sprachen können auch komplizierter sein:
 - ▶ $\{0, \dots, 9\}^* \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 - ▶ $\{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_a = |\sigma|_b\}$
 - ▶ $\{p \in \{\star\}^* : p \text{ ist unär codierte Primzahl}\}$
- ▶ Bei solchen allgemeinen Sprachen: Zählen oft sehr schwierig.

Q: $\mathcal{A} = \{\sigma \in \{a, b\}^* : |\sigma|_{aab} \geq 1\}$

- ▶ $a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- ▶ $a_3 = 1$: aab
- ▶ $a_4 = 4$: $aaba, aabb, baab, aaab$

A: Allgemein? $\rightsquigarrow$ später.

Operationen mit kombinatorischen Klassen – 1

- $\mathcal{A}, \mathcal{B} \dots$ kombinatorische Klassen.

Operationen mit kombinatorischen Klassen – 1

- ▶ $\mathcal{A}, \mathcal{B} \dots$ kombinatorische Klassen.
- ▶ **Disjunkte Addition:** $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ ist kombinatorische Klasse:
 $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(\odot, \alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{(\star, \beta) : \beta \in \mathcal{B}\}$

$$|(? , \gamma)|_{\mathcal{A} + \mathcal{B}} = \begin{cases} |\gamma|_{\mathcal{A}}, & \text{wenn } \gamma \in \mathcal{A}, \\ |\gamma|_{\mathcal{B}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Größe wird erhalten.)

Operationen mit kombinatorischen Klassen – 1

- $\mathcal{A}, \mathcal{B} \dots$ kombinatorische Klassen.
- **Disjunkte Addition:** $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ ist kombinatorische Klasse:
 $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(\odot, \alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{(\star, \beta) : \beta \in \mathcal{B}\}$

$$|(\gamma)|_{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = \begin{cases} |\gamma|_{\mathcal{A}}, & \text{wenn } \gamma \in \mathcal{A}, \\ |\gamma|_{\mathcal{B}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Größe wird erhalten.)

- Beispiel: $\mathcal{A} = \{a\}, \mathcal{B} = \{b, c\} \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a, b, c\}$

Operationen mit kombinatorischen Klassen – 1

- ▶ $\mathcal{A}, \mathcal{B} \dots$ kombinatorische Klassen.
- ▶ **Disjunkte Addition:** $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ ist kombinatorische Klasse:
 $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(\odot, \alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{(\star, \beta) : \beta \in \mathcal{B}\}$

$$|(\gamma)|_{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = \begin{cases} |\gamma|_{\mathcal{A}}, & \text{wenn } \gamma \in \mathcal{A}, \\ |\gamma|_{\mathcal{B}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Größe wird erhalten.)

- ▶ Beispiel: $\mathcal{A} = \{a\}, \mathcal{B} = \{b, c\} \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a, b, c\}$
- ▶ $\mathcal{A} = \{a\}, \mathcal{B} = \{a, b\} \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(\odot, a), (\star, a), (\star, b)\}.$

Operationen mit kombinatorischen Klassen – 2

- **Kartesisches Produkt:** $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}\}$ mit

$$|(\alpha, \beta)|_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} = |\alpha|_{\mathcal{A}} + |\beta|_{\mathcal{B}}.$$

(Größen werden kombiniert.)

Operationen mit kombinatorischen Klassen – 2

- **Kartesisches Produkt:** $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}\}$ mit

$$|(\alpha, \beta)|_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} = |\alpha|_{\mathcal{A}} + |\beta|_{\mathcal{B}}.$$

(Größen werden kombiniert.)

- **Folgenbildung:** $\varepsilon \notin \mathcal{A}$,

$$\text{SEQ}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^* = \{\varepsilon\} + \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^3 + \dots$$

Operationen mit kombinatorischen Klassen – 2

- **Kartesisches Produkt:** $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}\}$ mit

$$|(\alpha, \beta)|_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} = |\alpha|_{\mathcal{A}} + |\beta|_{\mathcal{B}}.$$

(Größen werden kombiniert.)

- **Folgenbildung:** $\varepsilon \notin \mathcal{A}$,

$$\text{SEQ}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^* = \{\varepsilon\} + \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^3 + \dots$$

- Beispiel: $\mathcal{G} = \{\text{grün}, \text{rot}, \text{gelb}\}$. Dann:

$$\mathcal{G}^* = \{\varepsilon, \text{grün}, \text{rot}, \text{gelb}, \text{grüngrün}, \text{grünrot}, \text{grün gelb}, \text{rotgrün}, \text{rot rot}, \text{rot gelb}, \text{gelbgrün}, \text{gelb rot}, \text{gelb gelb}, \dots\}$$

Auffrischung: geometrische Reihe

- Betrachte $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$. Einfacherer Ausdruck gesucht!

Auffrischung: geometrische Reihe

- ▶ Betrachte $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$. Einfacherer Ausdruck gesucht!
- ▶ Trick: multipliziere mit q , also

$$Sq = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1}.$$

Auffrischung: geometrische Reihe

- ▶ Betrachte $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$. Einfacherer Ausdruck gesucht!
- ▶ Trick: multipliziere mit q , also

$$Sq = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1}.$$

- ▶ Offenbar gilt

$$\begin{aligned} S - Sq &= 1 + q - q + q^2 - q^2 + \dots + q^n - q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Auffrischung: geometrische Reihe

- ▶ Betrachte $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$. Einfacherer Ausdruck gesucht!
- ▶ Trick: multipliziere mit q , also

$$Sq = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1}.$$

- ▶ Offenbar gilt

$$\begin{aligned} S - Sq &= 1 + q - q + q^2 - q^2 + \dots + q^n - q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

- ▶ Also: $S(1 - q) = 1 - q^{n+1} \iff S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$

Mehr geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^m q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Mehr geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^m q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Analysis: wenn $|q| < 1$ und $n \rightarrow \infty$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Mehr geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^m q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Analysis: wenn $|q| < 1$ und $n \rightarrow \infty$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
- Algebra: q bleibt **unbestimmt**, allgemein gilt

$$\frac{1}{1 - \odot} = 1 + \odot + \odot^2 + \odot^3 + \odot^4 + \dots$$

Mehr geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^m q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

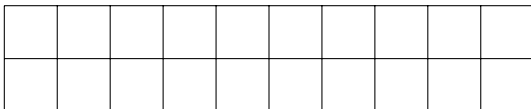
- Analysis: wenn $|q| < 1$ und $n \rightarrow \infty$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
- Algebra: q bleibt **unbestimmt**, allgemein gilt

$$\frac{1}{1 - \odot} = 1 + \odot + \odot^2 + \odot^3 + \odot^4 + \dots$$

- Algebra: **formale Potenzreihe**
- Analysis: **Reihenentwicklung**

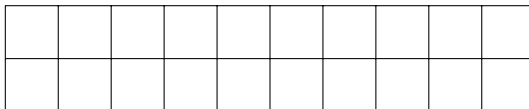
Spielen mit Dominos – 1

Q: # Möglichkeiten T_n um ein $n \times 2$ -Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



Spielen mit Dominos – 1

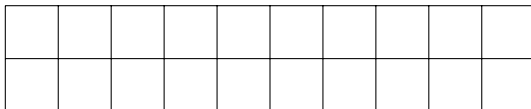
Q: # Möglichkeiten T_n um ein $n \times 2$ -Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



► $n = 1 \rightsquigarrow T_1 = 1: \square$

Spielen mit Dominos – 1

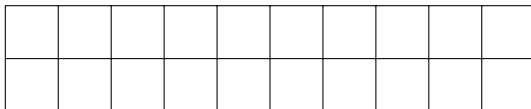
Q: # Möglichkeiten T_n um ein $n \times 2$ -Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



- ▶ $n = 1 \rightsquigarrow T_1 = 1: \square$
- ▶ $n = 2 \rightsquigarrow T_2 = 2: \begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$

Spielen mit Dominos – 1

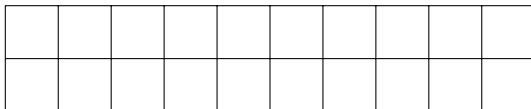
Q: # Möglichkeiten T_n um ein $n \times 2$ -Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



- ▶ $n = 1 \rightsquigarrow T_1 = 1$:
- ▶ $n = 2 \rightsquigarrow T_2 = 2$:
- ▶ $n = 3 \rightsquigarrow T_3 = 3$:

Spielen mit Dominos – 1

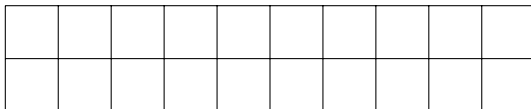
Q: # Möglichkeiten T_n um ein $n \times 2$ -Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



- ▶ $n = 1 \rightsquigarrow T_1 = 1$:
- ▶ $n = 2 \rightsquigarrow T_2 = 2$: ,
- ▶ $n = 3 \rightsquigarrow T_3 = 3$: , ,
- ▶ $n = 4 \rightsquigarrow T_4 = 5$: , , , ,

Spielen mit Dominos – 1

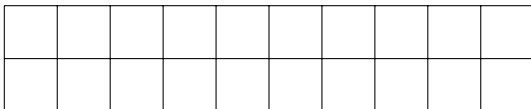
Q: # Möglichkeiten T_n um ein $n \times 2$ -Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



- ▶ $n = 1 \rightsquigarrow T_1 = 1$:
- ▶ $n = 2 \rightsquigarrow T_2 = 2$: ,
- ▶ $n = 3 \rightsquigarrow T_3 = 3$: , ,
- ▶ $n = 4 \rightsquigarrow T_4 = 5$: , , , ,
- ▶ $n = 0 \rightsquigarrow T_0 = 1$:

Spielen mit Dominos – 1

Q: # Möglichkeiten T_n um ein $n \times 2$ -Spielbrett mit Dominosteinen zu überdecken?



- ▶ $n = 1 \rightsquigarrow T_1 = 1$:
- ▶ $n = 2 \rightsquigarrow T_2 = 2$: ,
- ▶ $n = 3 \rightsquigarrow T_3 = 3$: , ,
- ▶ $n = 4 \rightsquigarrow T_4 = 5$: , , , ,
- ▶ $n = 0 \rightsquigarrow T_0 = 1$:

Allgemeiner Ansatz?

Spielen mit Dominos – 2

- Wir “rechnen” mit Dominos: $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \cdot \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \cdot \emptyset = \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$, usw.

Spielen mit Dominos – 2

- ▶ Wir “rechnen” mit Dominos: $\square \cdot \square = \square\square$, $\square \cdot \emptyset = \square$, usw.
- ▶ Addition einfach stehenlassen (vorerst)

Spielen mit Dominos – 2

- ▶ Wir “rechnen” mit Dominos: $\square \cdot \square = \square\square$, $\square \cdot \emptyset = \square$, usw.
- ▶ Addition einfach stehenlassen (vorerst)
- ▶ Wir untersuchen jetzt

$$T = \emptyset + \square + \square\square + \square\square\square + \square\square\square\square + \square\square\square\square\square + \square\square\square\square\square\square + \square\square\square\square\square\square\square + \dots$$

Spielen mit Dominos – 2

- ▶ Wir “rechnen” mit Dominos: $\square \cdot \square = \square\square$, $\square \cdot \emptyset = \square$, usw.
- ▶ Addition einfach stehenlassen (vorerst)
- ▶ Wir untersuchen jetzt

$$T = \emptyset + \square + \square\square + \square\square\square + \square\square\square\square + \square\square\square\square\square + \square\square\square\square\square\square + \square\square\square\square\square\square\square + \dots$$

- ▶ T repräsentiert alle Überdeckungen!

Spielen mit Dominos – 2

- ▶ Wir “rechnen” mit Dominos: $\square \cdot \square = \square\square$, $\boxplus \cdot \emptyset = \boxplus$, usw.
- ▶ Addition einfach stehenlassen (vorerst)
- ▶ Wir untersuchen jetzt

$$T = \emptyset + \square + \square\square + \boxplus + \square\square\square + \boxplus\square + \boxplus\square + \square\square\square + \dots$$

- ▶ T repräsentiert alle Überdeckungen!
- ▶ In T stecken Muster: hebe $\square$ bzw. $\boxplus$ wo möglich heraus!

$$\begin{aligned} \Rightarrow T &= \emptyset + \square \cdot (\emptyset + \square + \square\square + \boxplus + \dots) + \boxplus \cdot (\emptyset + \square + \square\square + \boxplus + \dots) \\ &= \emptyset + \square \cdot T + \boxplus \cdot T \end{aligned}$$

Spielen mit Dominos – 3

- Weiterrechnen:

$$T = \emptyset + \square \cdot T + \boxplus \cdot T \quad \Longleftrightarrow \quad T = \frac{\emptyset}{1 - \square - \boxplus}$$

Spielen mit Dominos – 3

- Weiterrechnen:

$$T = \emptyset + \sqcup \cdot T + \boxplus \cdot T \quad \Longleftrightarrow \quad T = \frac{\emptyset}{1 - \sqcup - \boxplus}$$

- Geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\emptyset}{1 - (\sqcup + \boxplus)} = \emptyset + \emptyset \cdot (\sqcup + \boxplus) + \emptyset \cdot (\sqcup + \boxplus)^2 + \dots \\ &= \emptyset + (\sqcup + \boxplus) + (\sqcup\sqcup + \boxplus\boxplus + \sqcup\boxplus + \boxplus\sqcup) + \dots \end{aligned}$$

Spielen mit Dominos – 3

- Weiterrechnen:

$$T = \emptyset + \sqcup \cdot T + \boxplus \cdot T \quad \Longleftrightarrow \quad T = \frac{\emptyset}{1 - \sqcup - \boxplus}$$

- Geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\emptyset}{1 - (\sqcup + \boxplus)} = \emptyset + \emptyset \cdot (\sqcup + \boxplus) + \emptyset \cdot (\sqcup + \boxplus)^2 + \dots \\ &= \emptyset + (\sqcup + \boxplus) + (\sqcup\sqcup + \sqcup\boxplus + \boxplus\sqcup + \boxplus\boxplus) + \dots \end{aligned}$$

- Reduktion von Information: rechne zB $\sqcup\boxplus + \boxplus\sqcup + \boxplus\boxplus = 3 \cdot \sqcup^2\boxplus$

$$T = \emptyset + (\sqcup + \boxplus) + (\sqcup^2 + 2 \cdot \sqcup\boxplus + \boxplus^2) + (\sqcup^3 + 3 \cdot \sqcup^2\boxplus + 3 \cdot \sqcup\boxplus^2 + \boxplus^3) + \dots$$

Spielen mit Dominos – 4

- Reduziere weiter: wir wollen **nur** Anzahl der Steine wissen!

$\rightsquigarrow z$ als “Marker”: $\emptyset \triangleq z^0 = 1$, $\sqcup \triangleq z^1$, $\boxplus \triangleq z^2$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{1 - (z + z^2)} \\
 &= 1 + (z + z^2) + (z^2 + 2z^3 + z^4) + (z^3 + 3z^4 + 3z^5 + z^6) \\
 &\quad + (z^4 + 4z^5 + 6z^6 + 4z^7 + z^8) + \dots \\
 &= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + \dots
 \end{aligned}$$

Spielen mit Dominos – 4

- Reduziere weiter: wir wollen **nur** Anzahl der Steine wissen!

$\rightsquigarrow z$ als “Marker”: $\emptyset \triangleq z^0 = 1$, $\sqcup \triangleq z^1$, $\boxplus \triangleq z^2$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1 - (z + z^2)} \\ &= 1 + (z + z^2) + (z^2 + 2z^3 + z^4) + (z^3 + 3z^4 + 3z^5 + z^6) \\ &\quad + (z^4 + 4z^5 + 6z^6 + 4z^7 + z^8) + \dots \\ &= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + \dots \end{aligned}$$

- T heißt **erzeugende Funktion**, # Überdeckungen mit n Steinen ist Koeffizient von z^n !

Spielen mit Dominos – 4

- Reduziere weiter: wir wollen **nur** Anzahl der Steine wissen!

$\rightsquigarrow z$ als “Marker”: $\emptyset \triangleq z^0 = 1$, $\sqcup \triangleq z^1$, $\boxplus \triangleq z^2$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1 - (z + z^2)} \\ &= 1 + (z + z^2) + (z^2 + 2z^3 + z^4) + (z^3 + 3z^4 + 3z^5 + z^6) \\ &\quad + (z^4 + 4z^5 + 6z^6 + 4z^7 + z^8) + \dots \\ &= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + \dots \end{aligned}$$

- T heißt **erzeugende Funktion**, # Überdeckungen mit n Steinen ist Koeffizient von z^n !
- SageMath:

```
var('z'); T = 1/(1 - z - z^2); T.series(z, 30)
```

Zahlungsmöglichkeiten – 1

Q: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 1.50€ mit Münzen $\textcircled{1c}$ $\textcircled{2c}$ $\textcircled{5c}$ $\textcircled{10c}$ zu bezahlen?

Zahlungsmöglichkeiten – 1

Q: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 1.50€ mit Münzen $\textcircled{1c}$ $\textcircled{2c}$ $\textcircled{5c}$ $\textcircled{10c}$ zu bezahlen?

► Ansatz ähnlich wie vorher:

$$Z^{(1)} = \cancel{\textcircled{1c}} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \textcircled{1c}^3 + \textcircled{1c}^4 + \dots = \frac{1}{1 - \textcircled{1c}}$$

$$\begin{aligned} Z^{(2)} &= \cancel{\textcircled{1c}}\cancel{\textcircled{2c}} + \textcircled{1c}\cancel{\textcircled{2c}} + \textcircled{1c}^2\cancel{\textcircled{2c}} + \dots + \cancel{\textcircled{1c}}\textcircled{2c} + \textcircled{1c}\textcircled{2c} + \textcircled{1c}^2\textcircled{2c} + \dots \\ &= \cancel{\textcircled{2c}}(\cancel{\textcircled{1c}} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \dots) + \textcircled{2c}(\cancel{\textcircled{1c}} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \dots) + \dots \\ &= \cancel{\textcircled{2c}}Z^{(1)} + \textcircled{2c}Z^{(1)} + \textcircled{2c}^2Z^{(1)} + \dots \\ &= Z^{(1)}(\cancel{\textcircled{2c}} + \textcircled{2c} + \textcircled{2c}^2 + \textcircled{2c}^3 + \dots) = \frac{1}{1 - \textcircled{1c}} \frac{1}{1 - \textcircled{2c}} \end{aligned}$$

Zahlungsmöglichkeiten – 1

Q: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 1.50€ mit Münzen $\textcircled{1c}$ $\textcircled{2c}$ $\textcircled{5c}$ $\textcircled{10c}$ zu bezahlen?

► Ansatz ähnlich wie vorher:

$$Z^{(1)} = \cancel{\textcircled{1c}} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \textcircled{1c}^3 + \textcircled{1c}^4 + \dots = \frac{1}{1 - \textcircled{1c}}$$

$$\begin{aligned} Z^{(2)} &= \cancel{\textcircled{1c}}\cancel{\textcircled{2c}} + \textcircled{1c}\cancel{\textcircled{2c}} + \textcircled{1c}^2\cancel{\textcircled{2c}} + \dots + \cancel{\textcircled{1c}}\textcircled{2c} + \textcircled{1c}\textcircled{2c} + \textcircled{1c}^2\textcircled{2c} + \dots \\ &= \cancel{\textcircled{2c}}(\cancel{\textcircled{1c}} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \dots) + \textcircled{2c}(\cancel{\textcircled{1c}} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \dots) + \dots \\ &= \cancel{\textcircled{2c}}Z^{(1)} + \textcircled{2c}Z^{(1)} + \textcircled{2c}^2Z^{(1)} + \dots \\ &= Z^{(1)}(\cancel{\textcircled{2c}} + \textcircled{2c} + \textcircled{2c}^2 + \textcircled{2c}^3 + \dots) = \frac{1}{1 - \textcircled{1c}} \frac{1}{1 - \textcircled{2c}} \end{aligned}$$

Zahlungsmöglichkeiten – 1

Q: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 1.50€ mit Münzen $\textcircled{1c}$ $\textcircled{2c}$ $\textcircled{5c}$ $\textcircled{10c}$ zu bezahlen?

► Ansatz ähnlich wie vorher:

$$Z^{(1)} = \cancel{\textcircled{1c}} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \textcircled{1c}^3 + \textcircled{1c}^4 + \dots = \frac{1}{1 - \textcircled{1c}}$$

$$\begin{aligned} Z^{(2)} &= \cancel{\textcircled{1c}}\cancel{\textcircled{2c}} + \textcircled{1c}\cancel{\textcircled{2c}} + \textcircled{1c}^2\cancel{\textcircled{2c}} + \dots + \cancel{\textcircled{1c}}\textcircled{2c} + \textcircled{1c}\textcircled{2c} + \textcircled{1c}^2\textcircled{2c} + \dots \\ &= \cancel{\textcircled{2c}}(\cancel{\textcircled{1c}} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \dots) + \textcircled{2c}(\cancel{\textcircled{1c}} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \dots) + \dots \\ &= \cancel{\textcircled{2c}}Z^{(1)} + \textcircled{2c}Z^{(1)} + \textcircled{2c}^2Z^{(1)} + \dots \\ &= Z^{(1)}(\cancel{\textcircled{2c}} + \textcircled{2c} + \textcircled{2c}^2 + \textcircled{2c}^3 + \dots) = \frac{1}{1 - \textcircled{1c}} \frac{1}{1 - \textcircled{2c}} \end{aligned}$$

► **Beobachtung:** Multiplikation kombiniert alle Möglichkeiten!

Zahlungsmöglichkeiten – 2

- Abkürzung zur Kombination:

$$\begin{aligned}
 Z &= (\cancel{1c} + 1c + 1c^2 + \dots) \cdot (\cancel{2c} + 2c + 2c^2 + \dots) \\
 &\quad \cdot (\cancel{5c} + 5c + 5c^2 + \dots) \cdot (\cancel{10c} + 10c + 10c^2 + \dots) \\
 &= \frac{1}{1 - 1c} \cdot \frac{1}{1 - 2c} \cdot \frac{1}{1 - 5c} \cdot \frac{1}{1 - 10c}
 \end{aligned}$$

Zahlungsmöglichkeiten – 2

- Abkürzung zur Kombination:

$$\begin{aligned}
 Z &= (\cancel{\textcircled{1c}} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \dots) \cdot (\cancel{\textcircled{2c}} + \textcircled{2c} + \textcircled{2c}^2 + \dots) \\
 &\quad \cdot (\cancel{\textcircled{5c}} + \textcircled{5c} + \textcircled{5c}^2 + \dots) \cdot (\cancel{\textcircled{10c}} + \textcircled{10c} + \textcircled{10c}^2 + \dots) \\
 &= \frac{1}{1 - \textcircled{1c}} \cdot \frac{1}{1 - \textcircled{2c}} \cdot \frac{1}{1 - \textcircled{5c}} \cdot \frac{1}{1 - \textcircled{10c}}
 \end{aligned}$$

- Reduktion: uns interessiert nur der finale Geldbetrag: $\textcircled{1c} \triangleq z^1$,
 $\textcircled{2c} \triangleq z^2$, $\textcircled{5c} \triangleq z^5$, $\textcircled{10c} \triangleq z^{10}$

Zahlungsmöglichkeiten – 2

- Abkürzung zur Kombination:

$$\begin{aligned}
 Z &= (\cancel{1c} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \dots) \cdot (\cancel{2c} + \textcircled{2c} + \textcircled{2c}^2 + \dots) \\
 &\quad \cdot (\cancel{5c} + \textcircled{5c} + \textcircled{5c}^2 + \dots) \cdot (\cancel{10c} + \textcircled{10c} + \textcircled{10c}^2 + \dots) \\
 &= \frac{1}{1 - \textcircled{1c}} \cdot \frac{1}{1 - \textcircled{2c}} \cdot \frac{1}{1 - \textcircled{5c}} \cdot \frac{1}{1 - \textcircled{10c}}
 \end{aligned}$$

- Reduktion: uns interessiert nur der finale Geldbetrag: $\textcircled{1c} \triangleq z^1$,
 $\textcircled{2c} \triangleq z^2$, $\textcircled{5c} \triangleq z^5$, $\textcircled{10c} \triangleq z^{10}$
- Die erzeugende Funktion ist

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{1}{1 - z} \frac{1}{1 - z^2} \frac{1}{1 - z^5} \frac{1}{1 - z^{10}} \\
 &= 1 + z + 2z^2 + 3z^4 + 4z^5 + \dots + 19z^{14} + 22z^{15} \\
 &\quad + \dots + 1020z^{76} + 1056z^{77} + \dots
 \end{aligned}$$

Zahlungsmöglichkeiten – 2

- Abkürzung zur Kombination:

$$\begin{aligned}
 Z &= (\cancel{1c} + \textcircled{1c} + \textcircled{1c}^2 + \dots) \cdot (\cancel{2c} + \textcircled{2c} + \textcircled{2c}^2 + \dots) \\
 &\quad \cdot (\cancel{5c} + \textcircled{5c} + \textcircled{5c}^2 + \dots) \cdot (\cancel{10c} + \textcircled{10c} + \textcircled{10c}^2 + \dots) \\
 &= \frac{1}{1 - \textcircled{1c}} \cdot \frac{1}{1 - \textcircled{2c}} \cdot \frac{1}{1 - \textcircled{5c}} \cdot \frac{1}{1 - \textcircled{10c}}
 \end{aligned}$$

- Reduktion: uns interessiert nur der finale Geldbetrag: $\textcircled{1c} \triangleq z^1$,
 $\textcircled{2c} \triangleq z^2$, $\textcircled{5c} \triangleq z^5$, $\textcircled{10c} \triangleq z^{10}$
- Die erzeugende Funktion ist

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{1}{1 - z} \frac{1}{1 - z^2} \frac{1}{1 - z^5} \frac{1}{1 - z^{10}} \\
 &= 1 + z + 2z^2 + 3z^4 + 4z^5 + \dots + 19z^{14} + 22z^{15} \\
 &\quad + \dots + 1020z^{76} + 1056z^{77} + \dots
 \end{aligned}$$

A: $Z = 1 + z + \dots + \mathbf{6696}z^{150} + 6816z^{151} + \dots$

Zahlungsmöglichkeiten – 3

Q: Möglichkeiten für 100€ in Münzen?

Zahlungsmöglichkeiten – 3

Q: Möglichkeiten für 100€ in Münzen?

► Erzeugende Funktion:

$$Z = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^2} \frac{1}{1-z^5} \frac{1}{1-z^{10}} \frac{1}{1-z^{20}} \frac{1}{1-z^{50}} \frac{1}{1-z^{100}} \frac{1}{1-z^{200}}$$

Zahlungsmöglichkeiten – 3

Q: Möglichkeiten für 100€ in Münzen?

► Erzeugende Funktion:

$$Z = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^2} \frac{1}{1-z^5} \frac{1}{1-z^{10}} \frac{1}{1-z^{20}} \frac{1}{1-z^{50}} \frac{1}{1-z^{100}} \frac{1}{1-z^{200}}$$

► Berechnung durch Koeffizientenextraktion langsam (≈ 5 min)

Zahlungsmöglichkeiten – 3

Q: Möglichkeiten für 100€ in Münzen?

- ▶ Erzeugende Funktion:

$$Z = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^2} \frac{1}{1-z^5} \frac{1}{1-z^{10}} \frac{1}{1-z^{20}} \frac{1}{1-z^{50}} \frac{1}{1-z^{100}} \frac{1}{1-z^{200}}$$

- ▶ Berechnung durch Koeffizientenextraktion langsam (≈ 5 min)
- ▶ Trick in SageMath:

```
sage: var('z')
```

```
sage: Z = 1/(1-z)/(1-z^2)/(1-z^5)/(1-z^10)/(1-z^20)/ \
```

```
.....: (1-z^50)/(1-z^100)/(1-z^200)
```

```
sage: Z = Z.canonicalize_radical()
```

```
sage: Z.series(z, 10001).coefficient(z, 10000)
```

Zahlungsmöglichkeiten – 3

Q: Möglichkeiten für 100€ in Münzen?

- ▶ Erzeugende Funktion:

$$Z = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^2} \frac{1}{1-z^5} \frac{1}{1-z^{10}} \frac{1}{1-z^{20}} \frac{1}{1-z^{50}} \frac{1}{1-z^{100}} \frac{1}{1-z^{200}}$$

- ▶ Berechnung durch Koeffizientenextraktion langsam (≈ 5 min)
- ▶ Trick in SageMath:

```
sage: var('z')
```

```
sage: Z = 1/(1-z)/(1-z^2)/(1-z^5)/(1-z^10)/(1-z^20)/ \
```

```
.....: (1-z^50)/(1-z^100)/(1-z^200)
```

```
sage: Z = Z.canonicalize_radical()
```

```
sage: Z.series(z, 10001).coefficient(z, 10000)
```

- ▶ Ergebnis: **1'133'873'304'647'601** (vgl. 150'738'274'937'250
Enigma-Einstellungen)

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- *$C \dots$ kombinatorische Klasse*

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- ▶ $\mathcal{C} \dots$ kombinatorische Klasse
- ▶ $c_n \dots \#$ Objekte der Größe n

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- ▶ $\mathcal{C} \dots$ kombinatorische Klasse
- ▶ $c_n \dots$ # Objekte der Größe n

Dann heißt $C(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ erzeugende Funktion von $\mathcal{C}$.

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- ▶ $\mathcal{C} \dots$ kombinatorische Klasse
- ▶ $c_n \dots$ # Objekte der Größe n

Dann heißt $C(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ erzeugende Funktion von $\mathcal{C}$.

- ▶ $C(z)$ repräsentiert **alle** Anzahlen!

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- ▶ $\mathcal{C} \dots$ kombinatorische Klasse
- ▶ $c_n \dots$ # Objekte der Größe n

Dann heißt $C(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ erzeugende Funktion von $\mathcal{C}$.

- ▶ $C(z)$ repräsentiert **alle** Anzahlen!
- ▶ Oft besserer Ansatz als Konzentration auf “festes” n

Gewöhnliche erzeugende Funktion

Definition ((Gewöhnliche) erzeugende Funktion)

- ▶ $\mathcal{C} \dots$ kombinatorische Klasse
- ▶ $c_n \dots$ # Objekte der Größe n

Dann heißt $C(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ erzeugende Funktion von $\mathcal{C}$.

- ▶ $C(z)$ repräsentiert **alle** Anzahlen!
- ▶ Oft besserer Ansatz als Konzentration auf “festes” n
- ▶ Insbesondere hilfreich beim Auflösen von Rekursionen

Auflösen von Rekursionen – 1

- Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$

Auflösen von Rekursionen – 1

- ▶ Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$
- ▶ $\rightsquigarrow$ Fibonacci-Zahlen (leicht verschoben)

Auflösen von Rekursionen – 1

- ▶ Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$
- ▶ $\rightsquigarrow$ Fibonacci-Zahlen (leicht verschoben)
- ▶ Erzeugende Funktion

$$F(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

Auflösen von Rekursionen – 1

- ▶ Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$
- ▶ $\rightsquigarrow$ Fibonacci-Zahlen (leicht verschoben)
- ▶ Erzeugende Funktion

$$F(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

- ▶ Rekursion auf $\mathbb{Z}$ reparieren: Setze $f_z = 0$ für $z < 0$

Auflösen von Rekursionen – 1

- ▶ Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$
- ▶ $\rightsquigarrow$ Fibonacci-Zahlen (leicht verschoben)
- ▶ Erzeugende Funktion

$$F(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

- ▶ Rekursion auf $\mathbb{Z}$ reparieren: Setze $f_z = 0$ für $z < 0$
 - ▶ Rekursion passt für $n < 0$: $0 = 0 + 0$

Auflösen von Rekursionen – 1

- ▶ Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$
- ▶ $\rightsquigarrow$ Fibonacci-Zahlen (leicht verschoben)
- ▶ Erzeugende Funktion

$$F(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

- ▶ Rekursion auf $\mathbb{Z}$ reparieren: Setze $f_z = 0$ für $z < 0$
 - ▶ Rekursion passt für $n < 0$: $0 = 0 + 0$
 - ▶ Korrektur für $n = 0$ nötig: $1 \neq 0 + 0$

Auflösen von Rekursionen – 1

- ▶ Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$
- ▶ $\rightsquigarrow$ Fibonacci-Zahlen (leicht verschoben)
- ▶ Erzeugende Funktion

$$F(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

- ▶ Rekursion auf $\mathbb{Z}$ reparieren: Setze $f_z = 0$ für $z < 0$
 - ▶ Rekursion passt für $n < 0$: $0 = 0 + 0$
 - ▶ Korrektur für $n = 0$ nötig: $1 \neq 0 + 0$
 - ▶ Iverson-Notation: $\llbracket n = 0 \rrbracket$ ist 1 wenn $n = 0$, 0 sonst

Auflösen von Rekursionen – 1

- ▶ Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$
- ▶ $\rightsquigarrow$ Fibonacci-Zahlen (leicht verschoben)
- ▶ Erzeugende Funktion

$$F(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

- ▶ Rekursion auf $\mathbb{Z}$ reparieren: Setze $f_z = 0$ für $z < 0$
 - ▶ Rekursion passt für $n < 0$: $0 = 0 + 0$
 - ▶ Korrektur für $n = 0$ nötig: $1 \neq 0 + 0$
 - ▶ Iverson-Notation: $\llbracket n = 0 \rrbracket$ ist 1 wenn $n = 0$, 0 sonst
- ▶ $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \llbracket n = 0 \rrbracket$, für $n \in \mathbb{Z}$

Auflösen von Rekursionen – 2

- Multiplikation mit z^n :

$$f_n z^n = f_{n-1} z^n + f_{n-2} z^n + \llbracket n = 0 \rrbracket z^n$$

Auflösen von Rekursionen – 2

- Multiplikation mit z^n :

$$f_n z^n = f_{n-1} z^n + f_{n-2} z^n + \llbracket n = 0 \rrbracket z^n$$

- Summation über $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^n = z \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n-2} z^{n-2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \llbracket n = 0 \rrbracket z^n$$

$$\Rightarrow F(z) = z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + 1$$

Auflösen von Rekursionen – 2

- ▶ Multiplikation mit z^n :

$$f_n z^n = f_{n-1} z^n + f_{n-2} z^n + \llbracket n = 0 \rrbracket z^n$$

- ▶ Summation über $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^n = z \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n-2} z^{n-2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \llbracket n = 0 \rrbracket z^n$$

$$\Rightarrow F(z) = z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + 1$$

- ▶ Gleichung auflösen:

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} (= \mathbf{T})$$

Auflösen von Rekursionen – 2

- ▶ Multiplikation mit z^n :

$$f_n z^n = f_{n-1} z^n + f_{n-2} z^n + \llbracket n=0 \rrbracket z^n$$

- ▶ Summation über $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^n = z \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n-2} z^{n-2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \llbracket n=0 \rrbracket z^n$$

$$\Rightarrow F(z) = z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + 1$$

- ▶ Gleichung auflösen:

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} (= \mathbf{T})$$

- ▶ Reihenentwicklung:

$$F(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + \dots$$



Zurück zu kombinatorischen Klassen

- Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- ▶ Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!
- ▶ Operationen auf kombinatorischen Klassen $\leftrightarrow$ Operationen auf erzeugenden Funktionen

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- ▶ Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!
- ▶ Operationen auf kombinatorischen Klassen $\leftrightarrow$ Operationen auf erzeugenden Funktionen
- ▶ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$... kombinatorische Klassen, $A(z)$, $B(z)$... zugeh. erzeugende Funktionen

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- ▶ Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!
- ▶ Operationen auf kombinatorischen Klassen $\leftrightarrow$ Operationen auf erzeugenden Funktionen
- ▶ $\mathcal{A}, \mathcal{B} \dots$ kombinatorische Klassen, $A(z), B(z) \dots$ zugeh. erzeugende Funktionen
 - ▶ $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ hat $A(z) + B(z)$ als erzeugende Funktion

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- ▶ Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!
- ▶ Operationen auf kombinatorischen Klassen $\longleftrightarrow$ Operationen auf erzeugenden Funktionen
- ▶ $\mathcal{A}, \mathcal{B} \dots$ kombinatorische Klassen, $A(z), B(z) \dots$ zugeh. erzeugende Funktionen
 - ▶ $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ hat $A(z) + B(z)$ als erzeugende Funktion
 - ▶ $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ hat $A(z) \cdot B(z)$ als erzeugende Funktion

Zurück zu kombinatorischen Klassen

- ▶ Erzeugende Funktionen und kombinatorische Klassen spielen sehr gut zusammen!
- ▶ Operationen auf kombinatorischen Klassen $\leftrightarrow$ Operationen auf erzeugenden Funktionen
- ▶ $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ kombinatorische Klassen, $A(z), B(z), \dots$ zugeh. erzeugende Funktionen
 - ▶ $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ hat $A(z) + B(z)$ als erzeugende Funktion
 - ▶ $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ hat $A(z) \cdot B(z)$ als erzeugende Funktion
 - ▶ $\mathcal{A}^*$ hat $\frac{1}{1-A(z)}$ als erzeugende Funktion

Die symbolische Methode

- Idee: konstruiere kombinatorische Klasse (und damit erz. Funktion) aus Angabe!

Die symbolische Methode

- ▶ Idee: konstruiere kombinatorische Klasse (und damit erz. Funktion) aus Angabe!
- ▶ **Beispiel:** $n \times 2$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{T}$

Die symbolische Methode

- ▶ Idee: konstruiere kombinatorische Klasse (und damit erz. Funktion) aus Angabe!
- ▶ **Beispiel:** $n \times 2$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{T}$
 - ▶ Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus $\square$ und $\boxplus$

Die symbolische Methode

- ▶ Idee: konstruiere kombinatorische Klasse (und damit erz. Funktion) aus Angabe!
- ▶ **Beispiel:** $n \times 2$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{T}$
 - ▶ Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus $\sqcup$ und $\boxplus$
 - ▶ Also: $\mathcal{T} = \{\sqcup, \boxplus\}^*$.

Die symbolische Methode

- ▶ Idee: konstruiere kombinatorische Klasse (und damit erz. Funktion) aus Angabe!
- ▶ **Beispiel:** $n \times 2$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{T}$
 - ▶ Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus $\sqcup$ und $\boxplus$
 - ▶ Also: $\mathcal{T} = \{\sqcup, \boxplus\}^*$.
 - ▶ Erzeugende Funktion von $\{\sqcup, \boxplus\}$: $z + z^2$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{1}{1 - (z + z^2)}$$

Die symbolische Methode

- ▶ Idee: konstruiere kombinatorische Klasse (und damit erz. Funktion) aus Angabe!
- ▶ **Beispiel:** $n \times 2$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{T}$
 - ▶ Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus $\sqcup$ und $\boxplus$
 - ▶ Also: $\mathcal{T} = \{\sqcup, \boxplus\}^*$.
 - ▶ Erzeugende Funktion von $\{\sqcup, \boxplus\}$: $z + z^2$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{1}{1 - (z + z^2)}$$

- ▶ **Beispiel:** Geldbeträge aus $(1c)$, $(2c)$, $(5c) \rightsquigarrow B$

Die symbolische Methode

- ▶ Idee: konstruiere kombinatorische Klasse (und damit erz. Funktion) aus Angabe!
- ▶ **Beispiel:** $n \times 2$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{T}$
 - ▶ Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus $\square$ und $\boxplus$
 - ▶ Also: $\mathcal{T} = \{\square, \boxplus\}^*$.
 - ▶ Erzeugende Funktion von $\{\square, \boxplus\}$: $z + z^2$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{1}{1 - (z + z^2)}$$

- ▶ **Beispiel:** Geldbeträge aus $\textcircled{1c}$, $\textcircled{2c}$, $\textcircled{5c}$ $\rightsquigarrow B$
 - ▶ Kombiniere Folge von $\textcircled{1c}$ mit Folge von $\textcircled{2c}$ und Folge von $\textcircled{5c}$!

Die symbolische Methode

- ▶ Idee: konstruiere kombinatorische Klasse (und damit erz. Funktion) aus Angabe!

- ▶ **Beispiel:** $n \times 2$ Domino-Überdeckungen $\rightsquigarrow \mathcal{T}$

- ▶ Beobachtung: Überdeckungen sind Folgen aus $\square$ und $\boxplus$
- ▶ Also: $\mathcal{T} = \{\square, \boxplus\}^*$.
- ▶ Erzeugende Funktion von $\{\square, \boxplus\}$: $z + z^2$

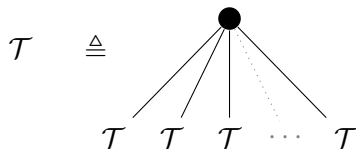
$$\Rightarrow T(z) = \frac{1}{1 - (z + z^2)}$$

- ▶ **Beispiel:** Geldbeträge aus $\textcircled{1c}$, $\textcircled{2c}$, $\textcircled{5c}$ $\rightsquigarrow B$

- ▶ Kombiniere Folge von $\textcircled{1c}$ mit Folge von $\textcircled{2c}$ und Folge von $\textcircled{5c}$!
- ▶ $B = \{\textcircled{1c}\}^* \times \{\textcircled{2c}\}^* \times \{\textcircled{5c}\}^*$

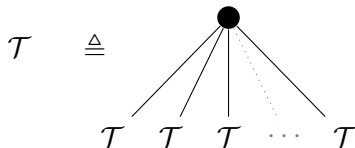
$$\Rightarrow B(z) = \frac{1}{1 - z} \cdot \frac{1}{1 - z^2} \cdot \frac{1}{1 - z^5}$$

Beispiel: Geordnete, gewurzelte Bäume



- Bäume sind eine Wurzel mit einer angehängten Folge von Bäumen.

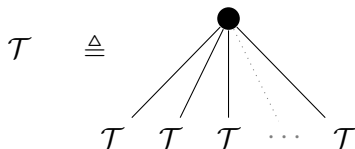
Beispiel: Geordnete, gewurzelte Bäume



- ▶ Bäume sind eine Wurzel mit einer angehängten Folge von Bäumen.
- ▶ Kombinatorische Klasse: $\mathcal{T} = \{\bullet\} \times \mathcal{T}^*$.

$$\Rightarrow T(z) = z \cdot \frac{1}{1 - T(z)} \quad \Rightarrow \quad T(z)^2 - T(z) + z = 0$$

Beispiel: Geordnete, gewurzelte Bäume

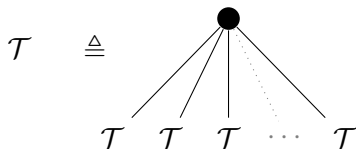


- ▶ Bäume sind eine Wurzel mit einer angehängten Folge von Bäumen.
- ▶ Kombinatorische Klasse: $\mathcal{T} = \{\bullet\} \times \mathcal{T}^*$.

$$\Rightarrow T(z) = z \cdot \frac{1}{1 - T(z)} \quad \Rightarrow \quad T(z)^2 - T(z) + z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2}$$

Beispiel: Geordnete, gewurzelte Bäume

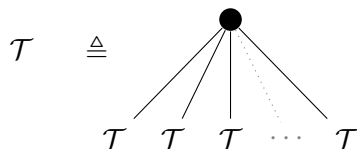


- ▶ Bäume sind eine Wurzel mit einer angehängten Folge von Bäumen.
- ▶ Kombinatorische Klasse: $\mathcal{T} = \{\bullet\} \times \mathcal{T}^*$.

$$\Rightarrow T(z) = z \cdot \frac{1}{1 - T(z)} \quad \Rightarrow \quad T(z)^2 - T(z) + z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2} \quad \rightsquigarrow \quad T(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}$$

Beispiel: Geordnete, gewurzelte Bäume



- ▶ Bäume sind eine Wurzel mit einer angehängten Folge von Bäumen.
- ▶ Kombinatorische Klasse: $\mathcal{T} = \{\bullet\} \times \mathcal{T}^*$.

$$\Rightarrow T(z) = z \cdot \frac{1}{1 - T(z)} \quad \Rightarrow \quad T(z)^2 - T(z) + z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2} \quad \rightsquigarrow \quad T(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}$$

- ▶ $T(z)$ erzeugt Catalan-Zahlen C_{n+1}

Beispiel: Wörter mit aab

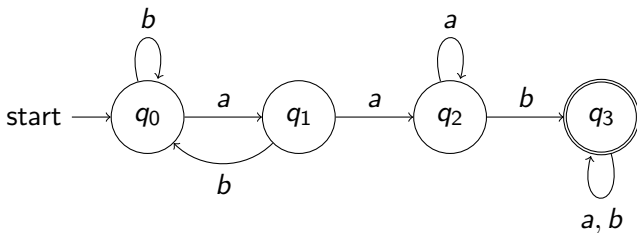
- Zunächst: Wörter müssen erkannt werden!

Beispiel: Wörter mit aab

- ▶ Zunächst: Wörter müssen erkannt werden!
- ▶ Wir bauen einen DFA:

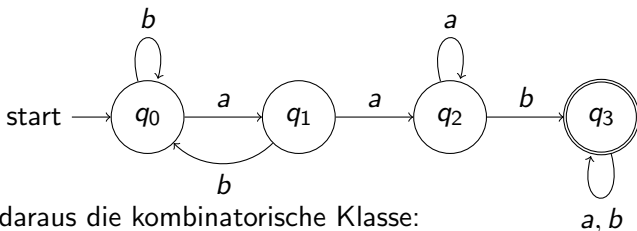
Beispiel: Wörter mit aab

- Zunächst: Wörter müssen erkannt werden!
- Wir bauen einen DFA:



Beispiel: Wörter mit aab

- Zunächst: Wörter müssen erkannt werden!
- Wir bauen einen DFA:

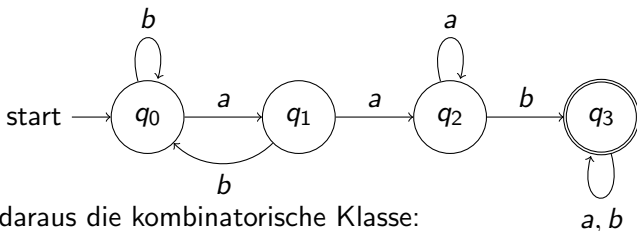


- Und daraus die kombinatorische Klasse:

$$\mathcal{W} = (b + ab)^* aaa^* b(a + b)^*$$

Beispiel: Wörter mit aab

- Zunächst: Wörter müssen erkannt werden!
- Wir bauen einen DFA:



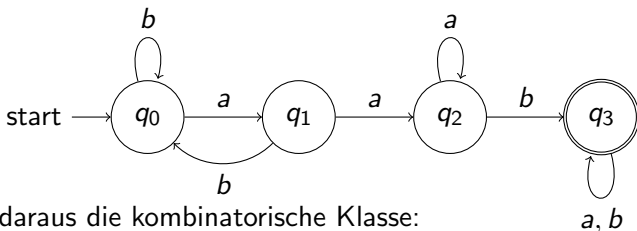
- Und daraus die kombinatorische Klasse:

$$\mathcal{W} = (b + ab)^* aaa^* b(a + b)^*$$

$$\Rightarrow W(z) = \frac{1}{1-z-z^2} z^2 \frac{1}{1-z} z \frac{1}{1-2z} = \frac{z^3}{(1-z-z^2)(1-z)(1-2z)}$$

Beispiel: Wörter mit aab

- Zunächst: Wörter müssen erkannt werden!
- Wir bauen einen DFA:

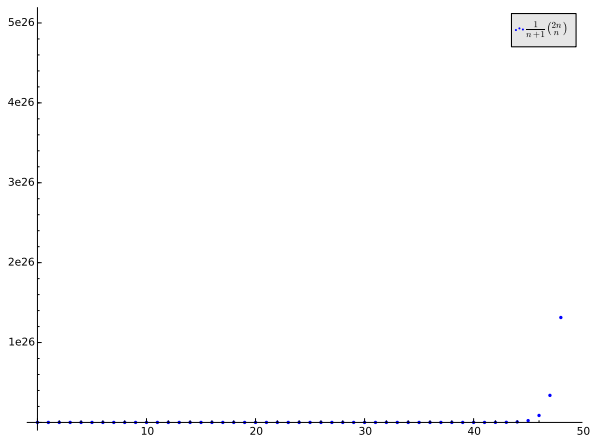


- Und daraus die kombinatorische Klasse:

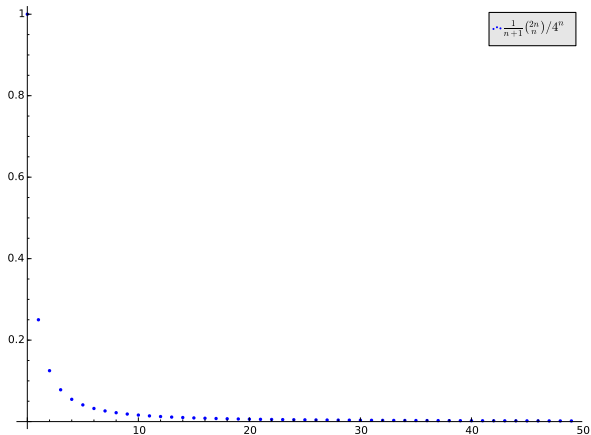
$$\mathcal{W} = (b + ab)^* aaa^* b(a + b)^*$$

- $\Rightarrow W(z) = \frac{1}{1-z-z^2} z^2 \frac{1}{1-z} z \frac{1}{1-2z} = \frac{z^3}{(1-z-z^2)(1-z)(1-2z)}$
- $W(z) = z^3 + 4z^4 + 12z^5 + 31z^6 + 74z^7 + \dots$

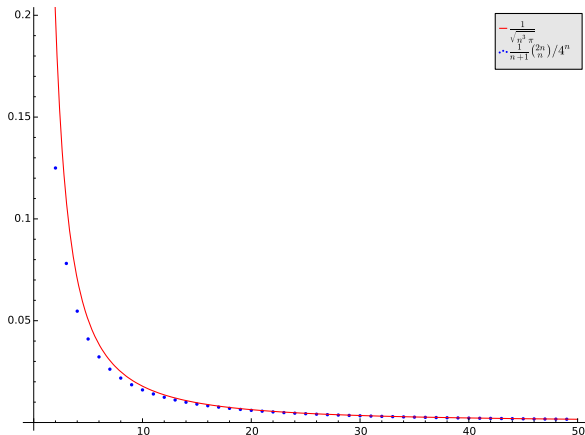
Asymptotische Analyse – 1



Asymptotische Analyse – 1



Asymptotische Analyse – 1



$$\Rightarrow C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n^3 \pi}}$$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

► $n! \sim$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

► $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- ▶ $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- ▶ $C_n \sim$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- ▶ $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- ▶ $C_n \sim 4^n \frac{1}{\sqrt{n^3 \pi}}$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- ▶ $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- ▶ $C_n \sim 4^n \frac{1}{\sqrt{n^3 \pi}}$
- ▶ $f_n \sim$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

- ▶ $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$
- ▶ $C_n \sim 4^n \frac{1}{\sqrt{n^3 \pi}}$
- ▶ $f_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$

Asymptotische Analyse – 2

Q: *Wie schnell wachsen die bisher untersuchten Größen?*

► $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$

► $C_n \sim 4^n \frac{1}{\sqrt{n^3 \pi}}$

► $f_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$

► ??? ☹

Asymptotische Analyse – 3

- Untersuchen wir verschiedene erzeugende Funktionen:

Asymptotische Analyse – 3

- ▶ Untersuchen wir verschiedene erzeugende Funktionen:

- ▶ $\mathcal{A} = \{a\}^* \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$

Asymptotische Analyse – 3

- ▶ Untersuchen wir verschiedene erzeugende Funktionen:
 - ▶ $\mathcal{A} = \{a\}^* \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$
 - ▶ $\mathcal{B} = \{a, b\}^* \Rightarrow B(z) = \frac{1}{1-2z}$

Asymptotische Analyse – 3

- Untersuchen wir verschiedene erzeugende Funktionen:

- $\mathcal{A} = \{a\}^* \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$
- $\mathcal{B} = \{a, b\}^* \Rightarrow B(z) = \frac{1}{1-2z}$
- $\mathcal{C} = \{a, b, c\}^* \Rightarrow C(z) = \frac{1}{1-3z}$

Asymptotische Analyse – 3

- ▶ Untersuchen wir verschiedene erzeugende Funktionen:
 - ▶ $\mathcal{A} = \{a\}^* \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$
 - ▶ $\mathcal{B} = \{a, b\}^* \Rightarrow B(z) = \frac{1}{1-2z}$
 - ▶ $\mathcal{C} = \{a, b, c\}^* \Rightarrow C(z) = \frac{1}{1-3z}$
- ▶ Man sieht einfach: $a_n = 1$, $b_n = 2^n$, $c_n = 3^n$

Asymptotische Analyse – 3

- ▶ Untersuchen wir verschiedene erzeugende Funktionen:
 - ▶ $\mathcal{A} = \{a\}^* \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$
 - ▶ $\mathcal{B} = \{a, b\}^* \Rightarrow B(z) = \frac{1}{1-2z}$
 - ▶ $\mathcal{C} = \{a, b, c\}^* \Rightarrow C(z) = \frac{1}{1-3z}$
- ▶ Man sieht einfach: $a_n = 1$, $b_n = 2^n$, $c_n = 3^n$
- ▶ Was lässt sich beobachten?

Asymptotische Analyse – 3

- ▶ Untersuchen wir verschiedene erzeugende Funktionen:
 - ▶ $\mathcal{A} = \{a\}^* \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$
 - ▶ $\mathcal{B} = \{a, b\}^* \Rightarrow B(z) = \frac{1}{1-2z}$
 - ▶ $\mathcal{C} = \{a, b, c\}^* \Rightarrow C(z) = \frac{1}{1-3z}$
- ▶ Man sieht einfach: $a_n = 1$, $b_n = 2^n$, $c_n = 3^n$
- ▶ Was lässt sich beobachten?
- ▶ $\rightsquigarrow$ Wenn $1/\rho$ **(dominante) Singularität** von $f(z)$, dann ist ρ^n in der Asymptotik!

Asymptotische Analyse – 3

- ▶ Untersuchen wir verschiedene erzeugende Funktionen:
 - ▶ $\mathcal{A} = \{a\}^* \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$
 - ▶ $\mathcal{B} = \{a, b\}^* \Rightarrow B(z) = \frac{1}{1-2z}$
 - ▶ $\mathcal{C} = \{a, b, c\}^* \Rightarrow C(z) = \frac{1}{1-3z}$
- ▶ Man sieht einfach: $a_n = 1$, $b_n = 2^n$, $c_n = 3^n$
- ▶ Was lässt sich beobachten?
- ▶ $\rightsquigarrow$ Wenn $1/\rho$ **(dominante) Singularität** von $f(z)$, dann ist ρ^n in der Asymptotik!
- ▶ **Catalan:** $T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$

Asymptotische Analyse – 3

- ▶ Untersuchen wir verschiedene erzeugende Funktionen:
 - ▶ $\mathcal{A} = \{a\}^* \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$
 - ▶ $\mathcal{B} = \{a, b\}^* \Rightarrow B(z) = \frac{1}{1-2z}$
 - ▶ $\mathcal{C} = \{a, b, c\}^* \Rightarrow C(z) = \frac{1}{1-3z}$
- ▶ Man sieht einfach: $a_n = 1$, $b_n = 2^n$, $c_n = 3^n$
- ▶ Was lässt sich beobachten?
- ▶ $\rightsquigarrow$ Wenn $1/\rho$ **(dominante) Singularität** von $f(z)$, dann ist ρ^n in der Asymptotik!
- ▶ **Catalan:** $T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$
 - ▶ Problem bei $z = \frac{1}{4}$

Asymptotische Analyse – 3

- ▶ Untersuchen wir verschiedene erzeugende Funktionen:
 - ▶ $\mathcal{A} = \{a\}^* \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$
 - ▶ $\mathcal{B} = \{a, b\}^* \Rightarrow B(z) = \frac{1}{1-2z}$
 - ▶ $\mathcal{C} = \{a, b, c\}^* \Rightarrow C(z) = \frac{1}{1-3z}$
- ▶ Man sieht einfach: $a_n = 1$, $b_n = 2^n$, $c_n = 3^n$
- ▶ Was lässt sich beobachten?
- ▶ $\rightsquigarrow$ Wenn $1/\rho$ **(dominante) Singularität** von $f(z)$, dann ist ρ^n in der Asymptotik!
- ▶ **Catalan:** $T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$
 - ▶ Problem bei $z = \frac{1}{4}$
 - ▶ $\Rightarrow \rho = 4$, $\rho^n = 4^n$ in Asymptotik

Asymptotische Analyse – 4

- Ort der dominanten Singularität $\rightsquigarrow$ exponentielles Wachstum.

Asymptotische Analyse – 4

- ▶ Ort der dominanten Singularität $\rightsquigarrow$ exponentielles Wachstum.
- ▶ Alle anderen Informationen: aus **Struktur** der erzeugenden Funktion!

Asymptotische Analyse – 4

- ▶ Ort der dominanten Singularität $\rightsquigarrow$ exponentielles Wachstum.
- ▶ Alle anderen Informationen: aus **Struktur** der erzeugenden Funktion!
- ▶ **Allgemein:** (“Singularity Analysis nach Flajolet, Odlyzko”)

$$f(z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} c \cdot (1 - z)^{-\alpha} \quad \Rightarrow \quad [z^n]f(z) \sim c \cdot \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Asymptotische Analyse – 4

- ▶ Ort der dominanten Singularität $\rightsquigarrow$ exponentielles Wachstum.
- ▶ Alle anderen Informationen: aus **Struktur** der erzeugenden Funktion!
- ▶ **Allgemein:** (“Singularity Analysis nach Flajolet, Odlyzko”)

$$f(z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} c \cdot (1 - z)^{-\alpha} \quad \Rightarrow \quad [z^n]f(z) \sim c \cdot \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

▶ $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$

Asymptotische Analyse – 4

- ▶ Ort der dominanten Singularität $\rightsquigarrow$ exponentielles Wachstum.
- ▶ Alle anderen Informationen: aus **Struktur** der erzeugenden Funktion!
- ▶ **Allgemein:** (“Singularity Analysis nach Flajolet, Odlyzko”)

$$f(z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} c \cdot (1 - z)^{-\alpha} \quad \Rightarrow \quad [z^n]f(z) \sim c \cdot \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

- ▶ $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$
- ▶ Ähnlich für komplizierte Ausdrücke, auch “genauere” Versionen verfügbar

Asymptotische Analyse – 5

- Idee / Theorie hinter Singularity Analysis:

Asymptotische Analyse – 5

- Idee / Theorie hinter Singularity Analysis:

- **Cauchy'sche Integralformel:** $\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = [z^n]f(z)$

Asymptotische Analyse – 5

- Idee / Theorie hinter Singularity Analysis:

- **Cauchy'sche Integralformel:** $\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = [z^n]f(z)$

- Geschickte Wahl und Transformation des Integrationswegs γ für $f(z) = (1 - z)^{-\alpha}$, Abschätzung des Integrals

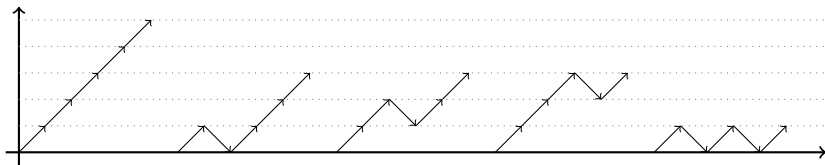
Asymptotische Analyse – 5

► Idee / Theorie hinter Singularity Analysis:

- **Cauchy'sche Integralformel:** $\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = [z^n]f(z)$
- Geschickte Wahl und Transformation des Integrationswegs γ für $f(z) = (1 - z)^{-\alpha}$, Abschätzung des Integrals
- **Transfersätze:** Wenn “nur” $f(z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} (1 - z)^{-\alpha}$: Fehler bleibt “brav”

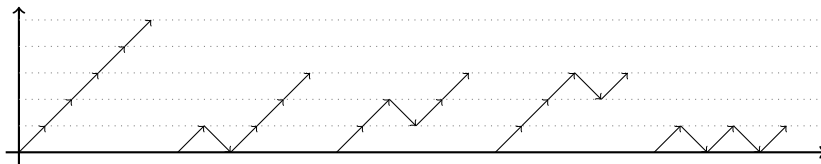
Kulminierende Pfade und Zhao's Vermutung

- **Schwach-kulminierende Pfade:** Schritte $(1, \pm 1)$, Beginn im Minimum, Ende im Maximum.



Kulminierende Pfade und Zhao's Vermutung

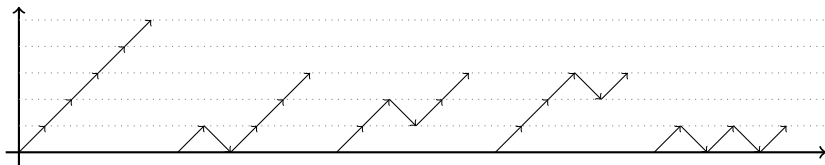
- **Schwach-kulminierende Pfade:** Schritte $(1, \pm 1)$, Beginn im Minimum, Ende im Maximum.



- **Kulminierende Pfade:** *eindeutiges* Minimum/Maximum.

Kulminierende Pfade und Zhao's Vermutung

- **Schwach-kulminierende Pfade:** Schritte $(1, \pm 1)$, Beginn im Minimum, Ende im Maximum.



- **Kulminierende Pfade:** *eindeutiges* Minimum/Maximum.
- **Zhao's Vermutung:** Anzahl der kulminierenden Pfade der Länge n ist

$$B_n = 2^n \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{6n^2} + O(n^{-3}) \right).$$

Schwach-Kulminierende Pfade – Ergebnisse

Satz (H.–Heuberger–Prodinger–Wagner, 2015)

Die Wahrscheinlichkeit $q_n = \sum_{h \geq 0} q_n^{(h)}$, dass ein Gitterpfad schwach-kulminierend ist erfüllt

$$q_n = \frac{1}{n} - \frac{4}{3n^2} + \frac{88}{45n^3} - \frac{976}{315n^4} + \frac{3488}{675n^5} + O(n^{-6}),$$

Schwach-Kulminierende Pfade – Ergebnisse

Satz (H.–Heuberger–Prodinger–Wagner, 2015)

Die Wahrscheinlichkeit $q_n = \sum_{h \geq 0} q_n^{(h)}$, dass ein Gitterpfad schwach-kulminierend ist erfüllt

$$q_n = \frac{1}{n} - \frac{4}{3n^2} + \frac{88}{45n^3} - \frac{976}{315n^4} + \frac{3488}{675n^5} + O(n^{-6}),$$

die erwartete Höhe eines schwach-kulminierenden Pfades ist

$$\frac{\sqrt{2\pi^3}}{4} \sqrt{n} - 2 + \frac{3\sqrt{2\pi^3}}{16\sqrt{n}} + O(n^{-3/2}),$$

Schwach-Kulminierende Pfade – Ergebnisse

Satz (H.–Heuberger–Prodinger–Wagner, 2015)

Die Wahrscheinlichkeit $q_n = \sum_{h \geq 0} q_n^{(h)}$, dass ein Gitterpfad schwach-kulminierend ist erfüllt

$$q_n = \frac{1}{n} - \frac{4}{3n^2} + \frac{88}{45n^3} - \frac{976}{315n^4} + \frac{3488}{675n^5} + O(n^{-6}),$$

die erwartete Höhe eines schwach-kulminierenden Pfades ist

$$\frac{\sqrt{2\pi^3}}{4} \sqrt{n} - 2 + \frac{3\sqrt{2\pi^3}}{16\sqrt{n}} + O(n^{-3/2}),$$

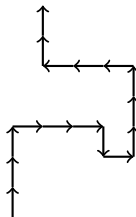
und die entsprechende Varianz ist

$$\frac{28\zeta(3) - \pi^3}{8} n + \frac{224\zeta(3) - 9\pi^3}{48} - \frac{1792\zeta(3) - 67\pi^3}{2880n} + O(n^{-2}).$$

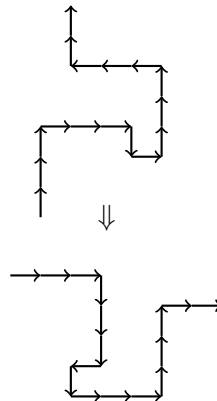
Reduction of lattice paths

Reduction of a simple, two-dimensional lattice path (i.e. a sequence of $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$):

- ▶ If the path starts with $\uparrow$ or $\downarrow$: rotate it
- ▶ If the path ends with $\rightarrow$ or $\leftarrow$: rotate the last step
- ▶ Consider the pairs of horizontal-vertical segments:
 - ▶ Replace $\rightarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nearrow$,
 - ▶ $\rightarrow \dots \downarrow \dots$ by $\searrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \downarrow \dots$ by $\swarrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nwarrow$.
- ▶ Rotate the entire path again



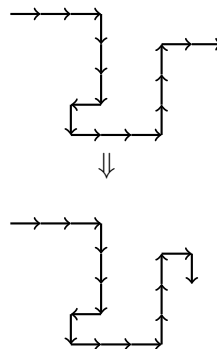
- ▶ If the path starts with $\uparrow$ or $\downarrow$: rotate it
- ▶ If the path ends with $\rightarrow$ or $\leftarrow$: rotate the last step
- ▶ Consider the pairs of horizontal-vertical segments:
 - ▶ Replace $\rightarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nearrow$,
 - ▶ $\rightarrow \dots \downarrow \dots$ by $\searrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \downarrow \dots$ by $\swarrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nwarrow$.
- ▶ Rotate the entire path again



Reduction of lattice paths

Reduction of a simple, two-dimensional lattice path (i.e. a sequence of $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$):

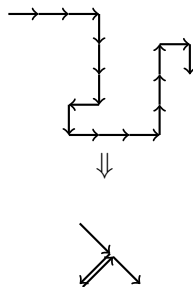
- ▶ If the path starts with $\uparrow$ or $\downarrow$: rotate it
- ▶ If the path ends with $\rightarrow$ or $\leftarrow$: rotate the last step
- ▶ Consider the pairs of horizontal-vertical segments:
 - ▶ Replace $\rightarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nearrow$,
 - ▶ $\rightarrow \dots \downarrow \dots$ by $\searrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \downarrow \dots$ by $\swarrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nwarrow$.
- ▶ Rotate the entire path again



Reduction of lattice paths

Reduction of a simple, two-dimensional lattice path (i.e. a sequence of $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$):

- ▶ If the path starts with $\uparrow$ or $\downarrow$: rotate it
- ▶ If the path ends with $\rightarrow$ or $\leftarrow$: rotate the last step
- ▶ Consider the pairs of horizontal-vertical segments:
 - ▶ Replace $\rightarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nearrow$,
 - ▶ $\rightarrow \dots \downarrow \dots$ by $\searrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \downarrow \dots$ by $\swarrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nwarrow$.
- ▶ Rotate the entire path again



Reduction of lattice paths

Reduction of a simple, two-dimensional lattice path (i.e. a sequence of $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$):

- ▶ If the path starts with $\uparrow$ or $\downarrow$:
rotate it
- ▶ If the path ends with $\rightarrow$ or $\leftarrow$:
rotate the last step
- ▶ Consider the pairs of horizontal-vertical segments:
 - ▶ Replace $\rightarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nearrow$,
 - ▶ $\rightarrow \dots \downarrow \dots$ by $\searrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \downarrow \dots$ by $\swarrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nwarrow$.
- ▶ Rotate the entire path again



Reduction of lattice paths

Reduction of a simple, two-dimensional lattice path (i.e. a sequence of $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$):

- ▶ If the path starts with $\uparrow$ or $\downarrow$: rotate it
- ▶ If the path ends with $\rightarrow$ or $\leftarrow$: rotate the last step
- ▶ Consider the pairs of horizontal-vertical segments:
 - ▶ Replace $\rightarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nearrow$,
 - ▶ $\rightarrow \dots \downarrow \dots$ by $\searrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \downarrow \dots$ by $\swarrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nwarrow$.
- ▶ Rotate the entire path again



Reduction of lattice paths

Reduction of a simple, two-dimensional lattice path (i.e. a sequence of $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$):

- ▶ If the path starts with $\uparrow$ or $\downarrow$: rotate it
- ▶ If the path ends with $\rightarrow$ or $\leftarrow$: rotate the last step
- ▶ Consider the pairs of horizontal-vertical segments:
 - ▶ Replace $\rightarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nearrow$,
 - ▶ $\rightarrow \dots \downarrow \dots$ by $\searrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \downarrow \dots$ by $\swarrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nwarrow$.
- ▶ Rotate the entire path again



Reduction of lattice paths

Reduction of a simple, two-dimensional lattice path (i.e. a sequence of $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$):

- ▶ If the path starts with $\uparrow$ or $\downarrow$:
rotate it
- ▶ If the path ends with $\rightarrow$ or $\leftarrow$:
rotate the last step
- ▶ Consider the pairs of horizontal-vertical segments:
 - ▶ Replace $\rightarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nearrow$,
 - ▶ $\rightarrow \dots \downarrow \dots$ by $\searrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \downarrow \dots$ by $\swarrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nwarrow$.
- ▶ Rotate the entire path again



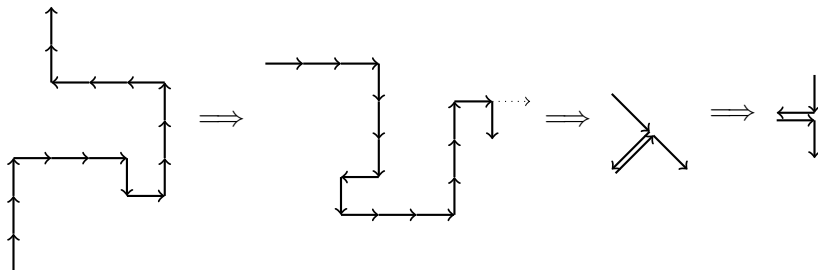
Reduction of lattice paths

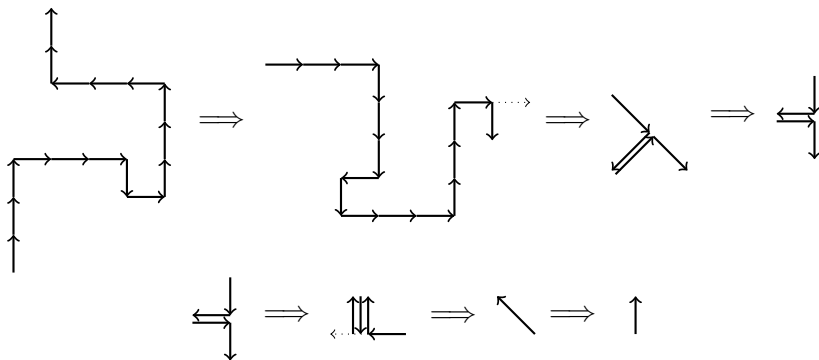
Reduction of a simple, two-dimensional lattice path (i.e. a sequence of $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$):

- ▶ If the path starts with $\uparrow$ or $\downarrow$:
rotate it
- ▶ If the path ends with $\rightarrow$ or $\leftarrow$:
rotate the last step
- ▶ Consider the pairs of horizontal-vertical segments:
 - ▶ Replace $\rightarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nearrow$,
 - ▶ $\rightarrow \dots \downarrow \dots$ by $\searrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \downarrow \dots$ by $\swarrow$,
 - ▶ $\leftarrow \dots \uparrow \dots$ by $\nwarrow$.
- ▶ Rotate the entire path again



Reduction and Reduction Degree





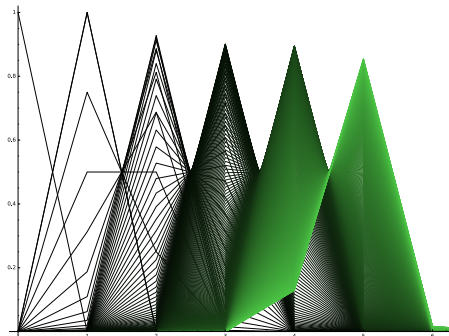
- 

Reduction degree – Random variables

- X_n ... compactification degree of a (uniformly) random lattice path of length n

Reduction degree – Random variables

- ▶ X_n ... compactification degree of a (uniformly) random lattice path of length n
- ▶ Probability densities of X_1 up to X_{512} :



Analysis of the expected reduction degree

Satz (H.–Heuberger–Prodinger, 2016)

The expected compactification degree among all simple 2D lattice paths of length n admits the asymptotic expansion

$$\mathbb{E}X_n = \log_4 n + \frac{\gamma + 2 - 3 \log 2}{2 \log 2} + \delta_1(\log_4 n) + O(n^{-1}),$$

Analysis of the expected reduction degree

Satz (H.–Heuberger–Prodinger, 2016)

The expected compactification degree among all simple 2D lattice paths of length n admits the asymptotic expansion

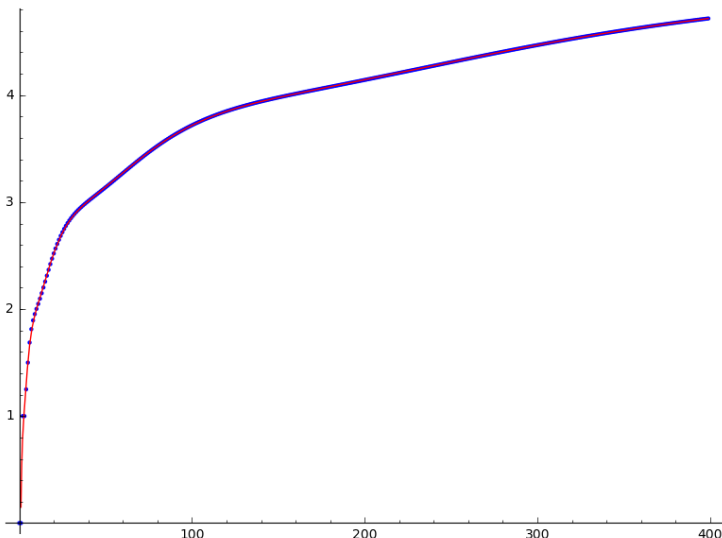
$$\mathbb{E}X_n = \log_4 n + \frac{\gamma + 2 - 3 \log 2}{2 \log 2} + \delta_1(\log_4 n) + O(n^{-1}),$$

where

$$\delta_1(x) = \frac{1}{\log 2} \sum_{k \neq 0} \frac{\Gamma(2 + \chi_k) \zeta(1 + \chi_k)}{\Gamma(1 + \chi_k/2)} e^{2k\pi i x}$$

is a small 1-periodic fluctuation.

Expected reduction degree: exact vs. asymptotic



Einblicke in den Alltag – 1



Einblicke in den Alltag – 2



Einblicke in den Alltag – 3



Eine Auswahl von Aufgaben

- ▶ Arbeit an der Dissertation = Forschung (!)

Eine Auswahl von Aufgaben

- ▶ Arbeit an der Dissertation = Forschung (!)
- ▶ Unterstützung bei der Lehre (≈ 2 SWS) + Supplierung

Eine Auswahl von Aufgaben

- ▶ Arbeit an der Dissertation = Forschung (!)
- ▶ Unterstützung bei der Lehre (≈ 2 SWS) + Supplierung
- ▶ Mitglied im PR-Team des Institutes

Eine Auswahl von Aufgaben

- ▶ Arbeit an der Dissertation = Forschung (!)
- ▶ Unterstützung bei der Lehre (≈ 2 SWS) + Supplierung
- ▶ Mitglied im PR-Team des Institutes
 - ▶ Entwicklung und Diskussion von PR-Strategien

Eine Auswahl von Aufgaben

- ▶ Arbeit an der Dissertation = Forschung (!)
- ▶ Unterstützung bei der Lehre (≈ 2 SWS) + Supplierung
- ▶ Mitglied im PR-Team des Institutes
 - ▶ Entwicklung und Diskussion von PR-Strategien
 - ▶ Verantwortlich für <https://www.aau.at/mathematik>

Eine Auswahl von Aufgaben

- ▶ Arbeit an der Dissertation = Forschung (!)
- ▶ Unterstützung bei der Lehre (≈ 2 SWS) + Supplierung
- ▶ Mitglied im PR-Team des Institutes
 - ▶ Entwicklung und Diskussion von PR-Strategien
 - ▶ Verantwortlich für <https://www.aau.at/mathematik>
- ▶ Betreuung von FerialpraktikantInnen, siehe
 - ▶ <https://www.math.aau.at/LNdF-2016>
 - ▶ <https://www.math.aau.at/coloring>