Warum Ordnung ganz schön schwer ist

Von Springern und Tierheimen

Benjamin Hackl

benjamin.hackl@aau.at

Institut für Mathematik
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

18. Dezember 2015

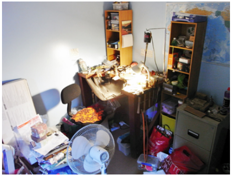
Einleitung

Ordnung – und meistens das Fehlen davon ☺ – bestimmt unser Leben:

Einleitung

Ordnung – und meistens das Fehlen davon ☺ – bestimmt unser Leben:

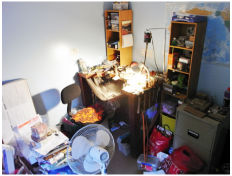
- . . . im Haushalt ($\rightarrow$ Aufräumen!)



Einleitung

Ordnung – und meistens das Fehlen davon ☺ – bestimmt unser Leben:

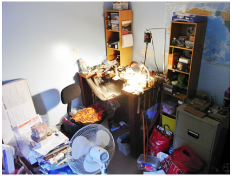
- . . . im Haushalt (→ Aufräumen!)
- . . . im Straßenverkehr (StVO, Fahrpläne, . . .)



Einleitung

Ordnung – und meistens das Fehlen davon ☺ – bestimmt unser Leben:

- ...im Haushalt ($\to$ Aufräumen!)
- ...im Straßenverkehr (StVO, Fahrpläne, ...)
- ...in der Schule (Stundenpläne, Sitzordnungen, ...)

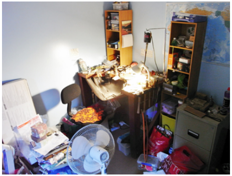


Uhrzeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
7:55	Deutsch	Französisch	Biologie	Religion	Mathe
8:40	Englisch	Musik	Geschichte	Physik	Mathe
9:40	Sport	Geschichte	Mathe	Französisch	Englisch
10:25	Sport	Mathe	Englisch	Französisch	Chemie
11:25	Religion	Physik	Erdkunde	Erdkunde	Musik
12:10	Sozialkunde	Chemie	Deutsch	Deutsch	Bio

Einleitung

Ordnung – und meistens das Fehlen davon ☺ – bestimmt unser Leben:

- . . . im Haushalt (→ Aufräumen!)
- . . . im Straßenverkehr (StVO, Fahrpläne, . . .)
- . . . in der Schule (Stundenpläne, Sitzordnungen, . . .)
- . . . beim Einkaufen (Anordnung der Produkte, . . .)

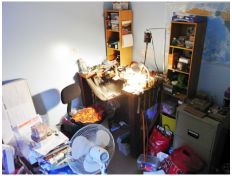


Uhrzeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
7:55	Deutsch	Französisch	Biologie	Religion	Mathe
8:40	Englisch	Musik	Geschichte	Physik	Mathe
9:40	Sport	Geschichte	Mathe	Französisch	Englisch
10:25	Sport	Mathe	Englisch	Französisch	Chemie
11:25	Religion	Physik	Erdkunde	Erdkunde	Musik
12:10	Sozialkunde	Chemie	Deutsch	Deutsch	Bio

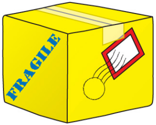
Einleitung

Ordnung – und meistens das Fehlen davon ☺ – bestimmt unser Leben:

- . . . im Haushalt (→ Aufräumen!)
- . . . im Straßenverkehr (StVO, Fahrpläne, . . .)
- . . . in der Schule (Stundenpläne, Sitzordnungen, . . .)
- . . . beim Einkaufen (Anordnung der Produkte, . . .)
- Weihnachtspaketlieferung (Beladung, Routenplanung, . . .)



Uhrzeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
7:55	Deutsch	Französisch	Biologie	Religion	Mathe
8:40	Englisch	Musik	Geschichte	Physik	Mathe
9:40	Sport	Geschichte	Mathe	Französisch	Englisch
10:25	Sport	Mathe	Englisch	Französisch	Chemie
11:25	Religion	Physik	Erdkunde	Erdkunde	Musik
12:10	Sozialkunde	Chemie	Deutsch	Deutsch	Bio



ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT
KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Und wo ist das Problem? (1)

Die Anzahl der möglichen Anordnungen wächst **extrem** schnell mit der Anzahl der Objekte!

Und wo ist das Problem? (1)

Die Anzahl der möglichen Anordnungen wächst **extrem** schnell mit der Anzahl der Objekte!

Beispiel – Ordnung in einem Regal

5 verschiede Bücher, ein Regal:

Und wo ist das Problem? (1)

Die Anzahl der möglichen Anordnungen wächst **extrem** schnell mit der Anzahl der Objekte!

Beispiel – Ordnung in einem Regal

5 verschiede Bücher, ein Regal:

Strategie: 5 Möglichkeiten für erste Position, 4 für zweite Position, usw. . . $\Rightarrow$ Insgesamt: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ Möglichkeiten.

Und wo ist das Problem? (2)

Beispiel – Ordnung in einem Regal (forts.)

- 10 Bücher: $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1 = 3628800$ Möglichkeiten.

Und wo ist das Problem? (2)

Beispiel – Ordnung in einem Regal (forts.)

- 10 Bücher: $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1 = 3628800$ Möglichkeiten.
- 50 Bücher: Anzahl der Möglichkeiten ist $50!$, das ist 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000.

Und wo ist das Problem? (2)

Beispiel – Ordnung in einem Regal (forts.)

- 10 Bücher: $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1 = 3628800$ Möglichkeiten.
- 50 Bücher: Anzahl der Möglichkeiten ist 50!, das ist 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000.
    - Braucht man nur 1 Sekunde um die Bücher entsprechend anzuordnen, so bräuchte man ca. $9.7 \cdot 10^{56}$ Jahre (!) um alle Anordnungen auszuprobieren.

Und wo ist das Problem? (2)

Beispiel – Ordnung in einem Regal (forts.)

- 10 Bücher: $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1 = 3628800$ Möglichkeiten.
- 50 Bücher: Anzahl der Möglichkeiten ist 50!, das ist 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000.
  - Braucht man nur 1 Sekunde um die Bücher entsprechend anzuordnen, so bräuchte man ca. $9.7 \cdot 10^{56}$ Jahre (!) um alle Anordnungen auszuprobieren.
  - Zum Vergleich: das Alter unseres Universums wird auf 13.7 Milliarden Jahre ($1.37 \cdot 10^{10}$) geschätzt!

Und wo ist das Problem? (3)

Beispiel – Beladung eines Lieferwagens

- In der Weihnachtszeit: bis zu 160 Pakete pro Arbeitstag!

Und wo ist das Problem? (3)

Beispiel – Beladung eines Lieferwagens

- In der Weihnachtszeit: bis zu 160 Pakete pro Arbeitstag!
- Anordnung im Auto auf mehreren Regalen. Berechnung bleibt gleich, also. . .

Und wo ist das Problem? (3)

Beispiel – Beladung eines Lieferwagens

- In der Weihnachtszeit: bis zu 160 Pakete pro Arbeitstag!
- Anordnung im Auto auf mehreren Regalen. Berechnung bleibt gleich, also...
- $160! = 160 \cdot 159 \cdots 2 \cdot 1 = 47147236359920613224069432117$
  $6194377951192623045460204976904578317542573467421580$
  $3469780302381149956995627281048195962621069473893039$
  $0174894290988785750962511488078131358501295952994166$
  $0203611234871833992565791817698209861793313332044734$
  $813700096000000000000000000000000000000000000000000.$

Und wo ist das Problem? (3)

Beispiel – Beladung eines Lieferwagens

- In der Weihnachtszeit: bis zu 160 Pakete pro Arbeitstag!
- Anordnung im Auto auf mehreren Regalen. Berechnung bleibt gleich, also. . .
- $160! = 160 \cdot 159 \cdots 2 \cdot 1 = 47147236359920613224069432117$
  $6194377951192623045460204976904578317542573467421580$
  $3469780302381149956995627281048195962621069473893039$
  $0174894290988785750962511488078131358501295952994166$
  $0203611234871833992565791817698209861793313332044734$
  $813700096000000000000000000000000000000000000000.$
- Das wären also $160! \approx 4.7 \cdot 10^{284}$ mögliche Beladungen.

Und wo ist das Problem? (3)

Beispiel – Beladung eines Lieferwagens

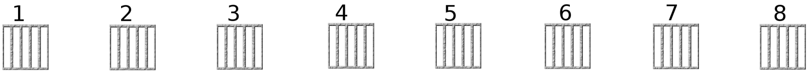
- In der Weihnachtszeit: bis zu 160 Pakete pro Arbeitstag!
- Anordnung im Auto auf mehreren Regalen. Berechnung bleibt gleich, also...
- $160! = 160 \cdot 159 \cdots 2 \cdot 1 = 47147236359920613224069432117$
  $6194377951192623045460204976904578317542573467421580$
  $3469780302381149956995627281048195962621069473893039$
  $0174894290988785750962511488078131358501295952994166$
  $0203611234871833992565791817698209861793313332044734$
  $813700096000000000000000000000000000000000000000.$
- Das wären also $160! \approx 4.7 \cdot 10^{284}$ mögliche Beladungen.

Fazit: Durchprobieren nicht sinnvoll möglich.

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

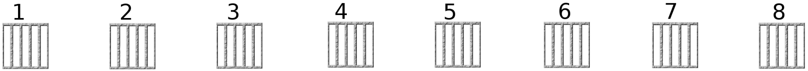
Das “Tierheimproblem” – Einführung

- In einem Tierheim müssen einige Tiere nebeneinander in Käfigen untergebracht werden.



Das “Tierheimproblem” – Einführung

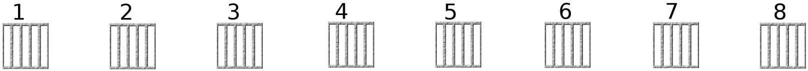
- In einem Tierheim müssen einige Tiere nebeneinander in Käfigen untergebracht werden.



- Vorsicht: nicht alle Tiere verstehen sich gleich gut!

Das "Tierheimproblem" – Einführung

- In einem Tierheim müssen einige Tiere nebeneinander in Käfigen untergebracht werden.

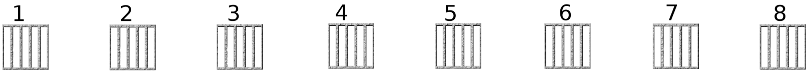


- Vorsicht: nicht alle Tiere verstehen sich gleich gut!
- Wenn Tiere, die einander mögen nahe beisammen sind, beruhigen sie sich → Lärmpegel sinkt!

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Das "Tierheimproblem" – Einführung

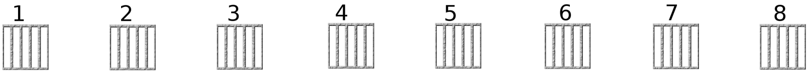
- In einem Tierheim müssen einige Tiere nebeneinander in Käfigen untergebracht werden.



- Vorsicht: nicht alle Tiere verstehen sich gleich gut!
- Wenn Tiere, die einander mögen nahe beisammen sind, beruhigen sie sich → Lärmpegel sinkt!
- Tiere, die sich **nicht** mögen stacheln einander auf → Lärmpegel steigt!

Das “Tierheimproblem” – Einführung

- In einem Tierheim müssen einige Tiere nebeneinander in Käfigen untergebracht werden.



- Vorsicht: nicht alle Tiere verstehen sich gleich gut!
- Wenn Tiere, die einander mögen nahe beisammen sind, beruhigen sie sich $\rightarrow$ Lärmpegel sinkt!
- Tiere, die sich **nicht** mögen stacheln einander auf $\rightarrow$ Lärmpegel steigt!
- Ziel: finde eine Anordnung mit **minimalem Lärmpegel**!

Punkteberechnung – leicht

- Zunächst: entweder 2 Tiere mögen einander (-1), oder sie sind einander egal (0).

Punkteberechnung – leicht

- Zunächst: entweder 2 Tiere mögen einander (-1), oder sie sind einander egal (0).
- Für jedes Tierpaar wird seine Entfernung in der Zuordnung mit der Zahl ihrer Beziehung multipliziert.

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Punkteberechnung – leicht

- Zunächst: entweder 2 Tiere mögen einander (-1), oder sie sind einander egal (0).
- Für jedes Tierpaar wird seine Entfernung in der Zuordnung mit der Zahl ihrer Beziehung multipliziert.
- Die Summe aller dieser Produkte ergibt die Punktzahl!

Punkteberechnung – leicht

- Zunächst: entweder 2 Tiere mögen einander (-1), oder sie sind einander egal (0).
- Für jedes Tierpaar wird seine Entfernung in der Zuordnung mit der Zahl ihrer Beziehung multipliziert.
- Die Summe aller dieser Produkte ergibt die Punktzahl!

Beispiel.

- Tiere: Katze, Kuh, Schildkröte. Die Kuh mag die Schildkröte.

Punkteberechnung – leicht

- Zunächst: entweder 2 Tiere mögen einander (-1), oder sie sind einander egal (0).
- Für jedes Tierpaar wird seine Entfernung in der Zuordnung mit der Zahl ihrer Beziehung multipliziert.
- Die Summe aller dieser Produkte ergibt die Punktzahl!

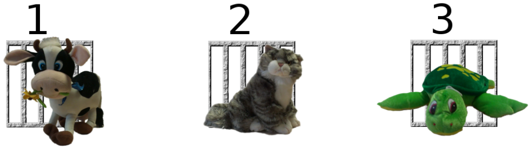
Beispiel.

- Tiere: Katze, Kuh, Schildkröte. Die Kuh mag die Schildkröte.
- Beziehungstabelle:

	Kuh	Katze	Schildkröte
Kuh	0	0	**-1**
Katze	0	0	0
Schildkröte	**-1**	0	0

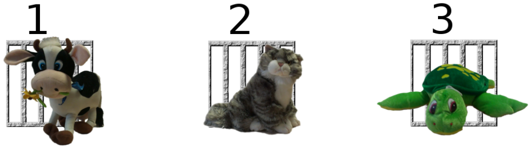
Beispiel – leicht

Versuch 1: -2 Punkte



Beispiel – leicht

Versuch 1: -2 Punkte



Versuch 2: -1 Punkt

Punkteberechnung – schwer

- Es geht aber noch schwerer: Tiere können sich auch verschieden stark mögen bzw. nicht mögen: Gewichte aus $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ sind möglich.

Punkteberechnung – schwer

- Es geht aber noch schwerer: Tiere können sich auch verschieden stark mögen bzw. nicht mögen: Gewichte aus $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ sind möglich.
- Am Rest ändert sich nichts.

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Punkteberechnung – schwer

- Es geht aber noch schwerer: Tiere können sich auch verschieden stark mögen bzw. nicht mögen: Gewichte aus $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ sind möglich.
- Am Rest ändert sich nichts.

Beispiel.

- Kuh mag Katze nicht $(+1)$, Kuh mag Schildkröte gar nicht $(+2)$, und Katze mag Schildkröte (-1).

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Punkteberechnung – schwer

- Es geht aber noch schwerer: Tiere können sich auch verschieden stark mögen bzw. nicht mögen: Gewichte aus $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ sind möglich.
- Am Rest ändert sich nichts.

Beispiel.

- Kuh mag Katze nicht $(+1)$, Kuh mag Schildkröte gar nicht $(+2)$, und Katze mag Schildkröte (-1).
- Beziehungstabelle:

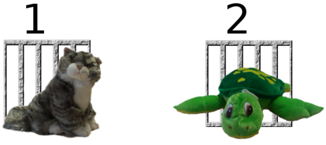
	Kuh	Katze	Schildkröte
Kuh	0	**+1**	**+2**
Katze	**+1**	0	**-1**
Schildkröte	**+2**	**-1**	0

Beispiel – schwer

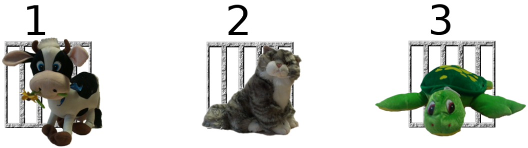
Versuch 1: 3 Punkte

Beispiel – schwer

Versuch 1: 3 Punkte



Versuch 2: 4 Punkte



ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Und jetzt: selbst probieren! ☺

- Für WLAN: mit Netzwerk `zid-connect` verbinden, im Browser auf `https://zid-connect.aau.at` navigieren.
- User: `w-technik`, Passwort: `technik2015`

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Und jetzt: selbst probieren! ☺

- Für WLAN: mit Netzwerk `zid-connect` verbinden, im Browser auf `https://zid-connect.aau.at` navigieren.
- User: `w-technik`, Passwort: `technik2015`

`https://www.math.aau.at/LNdF-2014`

www.math.aau.at/LNdF-2014

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Anwendungen und Ausblick

- Fachbegriff: *Single Row Facility Layout Problem* (SRFLP).

Anwendungen und Ausblick

- Fachbegriff: *Single Row Facility Layout Problem* (SRFLP).
- Wichtige Anwendungen:

Anwendungen und Ausblick

- Fachbegriff: *Single Row Facility Layout Problem* (SRFLP).
- Wichtige Anwendungen:
  - Zimmeranordnungen in Krankenhäusern oder Büroräumen

Anwendungen und Ausblick

- Fachbegriff: *Single Row Facility Layout Problem* (SRFLP).
- Wichtige Anwendungen:
  - Zimmeranordnungen in Krankenhäusern oder Büroräumen
  - Optimierung von Supermarktlayouts

Anwendungen und Ausblick

- Fachbegriff: *Single Row Facility Layout Problem* (SRFLP).
- Wichtige Anwendungen:
  - Zimmeranordnungen in Krankenhäusern oder Büroräumen
  - Optimierung von Supermarktlayouts
  - Zuordnung von Flugzeugen auf Gateways

Anwendungen und Ausblick

- Fachbegriff: *Single Row Facility Layout Problem* (SRFLP).
- Wichtige Anwendungen:
  - Zimmeranordnungen in Krankenhäusern oder Büroräumen
  - Optimierung von Supermarktlayouts
  - Zuordnung von Flugzeugen auf Gateways
- SRFLP ist ein sehr schweres Problem!

Anwendungen und Ausblick

- Fachbegriff: *Single Row Facility Layout Problem* (SRFLP).
- Wichtige Anwendungen:
  - Zimmeranordnungen in Krankenhäusern oder Büroräumen
  - Optimierung von Supermarktlayouts
  - Zuordnung von Flugzeugen auf Gateways
- SRFLP ist ein sehr schweres Problem!
- Die beste derzeit bekannte Methode findet eine optimale Lösung für 42 Objekte in einigen Stunden, aber bei 43 Objekten führt selbst tagelanges Rechnen meistens auf kein Ergebnis.

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Das Springerproblem – Einleitung

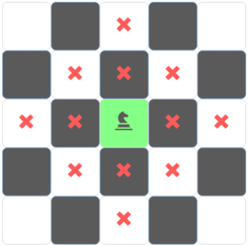
- Eine Schachfigur muss alle Felder eines Schachbrettes besuchen und anschließend zum Start zurückkehren.

Das Springerproblem – Einleitung

- Eine Schachfigur muss alle Felder eines Schachbrettes besuchen und anschließend zum Start zurückkehren.
- Ziel: Kürzesten Weg finden!

Das Springerproblem – Einleitung

- Eine Schachfigur muss alle Felder eines Schachbrettes besuchen und anschließend zum Start zurückkehren.
- Ziel: Kürzesten Weg finden!
- Schwierigkeit: verbotene Umgebungen!



Und wieder: selbst probieren! ☺

- Für WLAN: mit Netzwerk `zid-connect` verbinden, im Browser auf `https://zid-connect.aau.at` navigieren.
- User: `w-technik`, Passwort: `technik2015`

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Und wieder: selbst probieren! ☺

- Für WLAN: mit Netzwerk `zid-connect` verbinden, im Browser auf `https://zid-connect.aau.at` navigieren.
- User: `w-technik`, Passwort: `technik2015`

`https://www.math.aau.at/LNdF-2016`

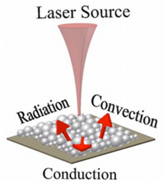
www.math.aau.at/LNdF-2016

ALPEN-ADRIA UNIVERSITÄT KLAGENFURT | WIEN GRAZ

Anwendung: “Laser-Schmelze”

- Materialerhitzung durch Laser.

“Laser-Schmelze” im Fraunhofer-Institut

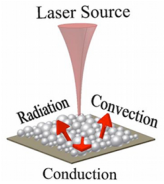


Erhitzung durch Laser

Anwendung: "Laser-Schmelze"

- Materialerhitzung durch Laser.
- Nach Erhitzung nicht in direkter Umgebung weiterschmelzen!

"Laser-Schmelze" im Fraunhofer-Institut

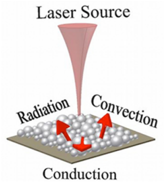


Erhitzung durch Laser

Anwendung: "Laser-Schmelze"

- Materialerhitzung durch Laser.
- Nach Erhitzung nicht in direkter Umgebung weiterschmelzen!
- Dennoch minimalen Weg mit Laser zurücklegen.

"Laser-Schmelze" im Fraunhofer-Institut



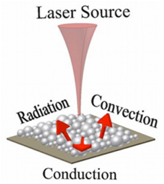
Erhitzung durch Laser

Anwendung: "Laser-Schmelze"

- Materialerhitzung durch Laser.
- Nach Erhitzung nicht in direkter Umgebung weiterschmelzen!
- Dennoch minimalen Weg mit Laser zurücklegen.

$\Rightarrow$ Springertour!

"Laser-Schmelze" im Fraunhofer-Institut



Erhitzung durch Laser