Asymptotic Analysis of Shape Parameters of Trees and Lattice Paths

Benjamin Hackl

Bäume und *Gitterpfade* sind zwei klassische, untrennbar miteinander verbundene kombinatorische Objektklassen innerhalb der diskreten Mathematik. Sie besitzen Anwendungen in zahlreichen sowohl inner- als auch außermathematischen Anwendungen: So ist das Konzept von Bäumen beispielsweise in der Informatik unabdingbar, wo es etwa in der Gestalt von Dateisystem, allgemeinen Datenstrukturen, und selbstverständlich auch in Algorithmen in Erscheinung tritt. In ähnlicher Art und Weise finden sich auch Gitterpfade in den Naturwissenschaften als Modelle für Teilchenbewegungen wieder.

Die Dissertation „*Asymptotic Analysis of Shape Parameters of Trees and Lattice Paths*" beschäftigt sich — wie auch schon ihr Name verspricht — mit einer detaillierten Analyse von gewissen strukturellen Eigenschaften dieser Objekte.

Die Arbeit beschäftigt sich dabei primär mit Parametern, die mit einem vorgegebenen Reduktionsverfahren zusammenhängen. Abbildung 1 liefert ein konkretes Beispiel: Dort wird ein gegebener geordneter Wurzelbaum wiederholt durch das gleiche Verfahren („Entferne alle Knoten ohne Kinder") reduziert, bis ein nicht mehr weiter reduzierbarer Baum entsteht.

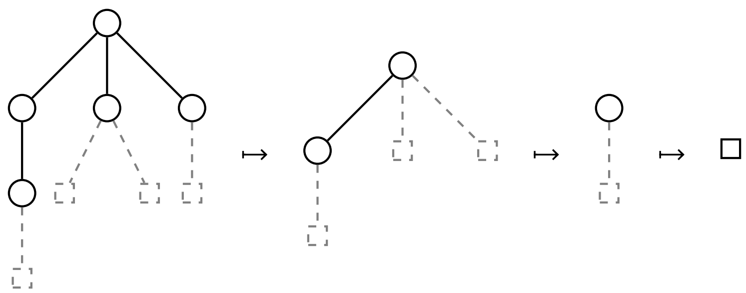


Abbildung 1: Iterierte Anwendung einer einfachen Baumreduktion.

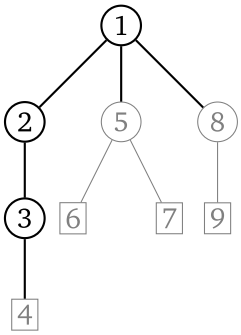
In diesem Kontext ergeben sich so direkt zwei zentrale Fragestellungen. Einerseits ist die Anzahl der Reduktionen von Interesse, die benötigt werden um ein Objekt gegebener Größe in eine irreduzible Gestalt zu bringen. Im Beispiel aus Abbildung 1 fällt diese Größe — wie man sich sehr leicht überlegen kann — mit der sogenannten *Höhe* des Baumes zusammen. Auch bei auf anderen Objekten definierten Reduktionen ergeben sich so wohlbekannte Parameter (wie beispielsweise die sogenannte *Registerfunktion*, a.k.a. *Horton-Strahler-Index*, auf Binärbäumen), was neben einem neuen Ansatz für die Analyse auch zu einer neuen Interpretation der Parameter führt.

Andererseits kann man aber auch die Reduktion per se genauer untersuchen. Hierzu bietet es sich etwa an, die Objektgröße nach einer festen Anzahl von Anwendungen der Reduktion zu untersuchen — was einerseits Auskunft über die „Geschwindigkeit" der Reduktion gibt, und andererseits auch Rückschlüsse auf lokale Teilstrukturen innerhalb der Objekte selbst zulässt.

Ein weiterer Parameter, der im Rahmen der Dissertation untersucht wird, hat ebenfalls mit lokalen Teilstrukturen in sogenannten *Łukasiewicz-Pfaden* zu tun. Das sind Gitterpfade, bei denen in der

Menge der erlaubten Schritte nur ein einziger Schritt nach unten (also $\searrow$) enthalten ist.

Kombinatorisch gesehen sind Łukasiewicz-Pfade, beziehungsweise *Łukasiewicz-Exkursionen* (eine wichtige Teilfamilie, die aus jenen Pfaden besteht die nie unter die Ausgangshöhe fallen und auf der Ausgangshöhe enden) besonders ergiebig, da sie durch die in Abbildung 2 illustrierte Bijektion eine baumähnliche Struktur besitzen.



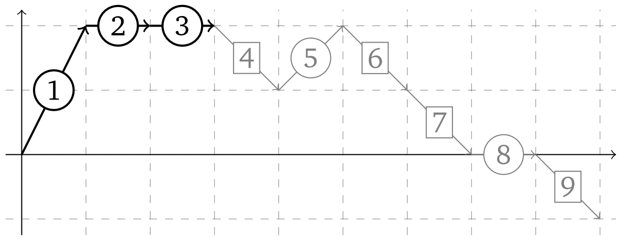


Abbildung 2: Bijektion zwischen Łukasiewicz-Pfaden und geordneten Wurzelbäumen, bei denen die Anzahl der Kinder einzelner Knoten aus einer vorgegebenen Menge stammt. Die hervorgehobenen Knoten und Kanten im Baum stehen für die Konstruktion des Baumes nach den ersten drei Schritten des Pfades.

Im Kontext von Łukasiewicz-Pfaden sind wir an sogenannten *Aufstiegen* interessiert, das sind maximale Folgen nicht-negativer Schritte. Die oben erwähnte baumähnliche Struktur dieser Pfade erlaubt eine tiefgreifende Analyse der Anzahl der Aufstiege gegebener Länge.

Stellenweise erfordern die Analysen der in dieser Dissertation untersuchten Parameter äußerst rechenintensive Operationen mit asymptotischen Entwicklungen. Um diese Rechnungen effizient handhaben zu können wird ein von Clemens Heuberger, Daniel Krenn und mir entwickeltes Kernmodul im freien, quelloffenen Computermathematiksystem SageMath verwendet. Die entsprechenden SageMath-Worksheets stehen zum Download zur Verfügung.